

### Esercizio 1.

Nei prossimi due punti, lo studente dovrà considerare un gioco simultaneo e senza comunicazione tra due giocatori, 1 e 2, ciascuno dei quali può scegliere una delle due opzioni A oppure B. I payoff per i due giocatori sono dati di seguito, il primo per il giocatore 1 e il secondo per il giocatore 2. L'ordinamento dei payoff è AA, AB, BA, BB, dove XY indica il risultato quando il giocatore 1 sceglie X e il giocatore 2 sceglie Y.

Giocatore 1: 1, 7, 3, 10.

Giocatore 2: 4, 9, 6, 10.

**Domanda A:** Specifica TUTTI gli equilibri di Nash.

Per risolvere correttamente questo tipo di esercizi è necessario capire come costruire la matrice dei payoff. Rappresentiamo una matrice 2x2.

		2	
		A	B
1	A	1,4	7,9
	B	3,6	10,10

Sappiamo dal testo dell'esercizio che l'ordinamento dei payoff è AA, AB, BA, BB. Questo significa che la prima cella in alto a sinistra contiene il payoff 1 per il giocatore 1 e il payoff 4 per il giocatore 2; la cella in alto a destra contiene il payoff 7 per il giocatore 1 e il payoff 9 per il giocatore 2; la cella in basso a sinistra contiene il payoff 3 per il giocatore 1 e il payoff 6 per il giocatore 2; la cella in basso a destra contiene il payoff 10 per il giocatore 1 e il payoff 10 per il giocatore 2.

Considero il giocatore 1 (giocatore riga).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 1 se il giocatore 2 (giocatore colonna) sceglie la strategia A? La strategia migliore è scegliere B perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 3 (rispetto ad un payoff di 1).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 1 se il giocatore 2 sceglie la strategia B? La strategia migliore è scegliere B perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 10 (rispetto ad un payoff di 7). La strategia B è la strategia dominante per il giocatore 1, perché il payoff è maggiore, qualsiasi sia la scelta del giocatore 2.

Considero ora il giocatore 2 (giocatore colonna).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 2 se il giocatore 1 sceglie la strategia A? La strategia migliore è scegliere B perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 6 (rispetto ad un payoff di 4).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 2 se il giocatore 1 sceglie la strategia B? La strategia migliore è scegliere B perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 10 (rispetto ad un payoff di 9). La strategia B è la strategia dominante per il giocatore 2, perché il payoff è maggiore, qualsiasi sia la scelta del giocatore 1.

In questo gioco è presente un unico equilibrio di Nash in (B,B), in corrispondenza del quale il giocatore 1 ottiene un payoff pari a 10 e il giocatore 2 ottiene un payoff pari a 10.

**Domanda B:** Specifica TUTTI gli altri risultati (che non sono equilibri di Nash), che dominano in senso paretiano gli eventuali equilibri di Nash.

Non c'è nessun altro risultato che domina in senso paretiano l'equilibrio di Nash corrispondente alla coppia di strategie (B, B). L'equilibrio di Nash trovato al punto A è anche efficiente in senso paretiano perché nessuno dei due giocatori desidera spostarsi e cambiare strategia. In altre parole, partendo dall'equilibrio di Nash rappresentato dalla coppia di strategie (B, B) nessuno dei due giocatori ha la possibilità di migliorare il proprio payoff senza peggiorare il payoff dell'altro giocatore.

## **Esercizio 2.**

Nei prossimi due punti, lo studente dovrà considerare un gioco simultaneo e senza comunicazione tra due giocatori, 1 e 2, ciascuno dei quali può scegliere una delle due opzioni A oppure B. I payoff per i due giocatori sono dati di seguito, il primo per il giocatore 1 e il secondo per il giocatore 2. L'ordinamento dei payoff è AA, AB, BA, BB, dove XY indica il risultato quando il giocatore 1 sceglie X e il giocatore 2 sceglie Y.

Giocatore 1: 10, 6, 10, 6.

Giocatore 2: 9, 6, 10, 8.

**Domanda A:** Specifica TUTTI gli equilibri di Nash.

Definiamo la matrice dei payoff:

		2	
		A	B
1	A	10,9	6,6
	B	10,10	6,8

La prima cella in alto a sinistra contiene il payoff 10 per il giocatore 1 e il payoff 9 per il giocatore 2; la cella in alto a destra contiene il payoff 6 per il giocatore 1 e il payoff 6 per il giocatore 2; la cella in basso a sinistra contiene il payoff 10 per il giocatore 1 e il payoff 10 per il giocatore 2; la cella in basso a destra contiene il payoff 6 per il giocatore 1 e il payoff 8 per il giocatore 2.

Considero il giocatore 1 (giocatore riga).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 1 se il giocatore 2 (giocatore colonna) sceglie la strategia A? Il giocatore 1 è indifferente tra scegliere la strategia A o B perché in entrambi i casi il payoff è 10.

Qual è la strategia migliore per il giocatore 1 se il giocatore 2 sceglie la strategia B? Il giocatore 1 è indifferente tra scegliere la strategia A o B perché in entrambi i casi il payoff è 6. Il giocatore 1 non ha una strategia dominante.

Considero ora il giocatore 2 (giocatore colonna).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 2 se il giocatore 1 sceglie la strategia A? La strategia migliore è scegliere A perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 9 (rispetto ad un payoff di 6).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 2 se il giocatore 1 sceglie la strategia B? La strategia migliore è scegliere A perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 10 (rispetto ad un payoff di 8). La strategia A è la strategia dominante per il giocatore 2, perché il payoff è maggiore, qualsiasi sia la scelta del giocatore 1.

In questo gioco sono presenti due equilibri di Nash in (A,A) e (B,A).

**Domanda B:** Specifica TUTTI gli altri risultati (che non sono equilibri di Nash), che dominano in senso paretiano gli eventuali equilibri di Nash.

Non c'è nessun altro risultato che domina in senso paretiano gli equilibri di Nash (A,A) e (B,A). Gli equilibri di Nash trovati al punto A sono anche efficienti in senso paretiano perché nessuno dei



due giocatori desidera spostarsi e cambiare strategia. In altre parole, partendo dagli equilibri di Nash nessuno dei due giocatori ha la possibilità di migliorare il proprio payoff senza peggiorare il payoff dell'altro giocatore.

### Esercizio 3.

Nei prossimi due punti, lo studente dovrà considerare un gioco simultaneo e senza comunicazione tra due giocatori, 1 e 2, ciascuno dei quali può scegliere una delle due opzioni A oppure B. I payoff per i due giocatori sono dati di seguito, il primo per il giocatore 1 e il secondo per il giocatore 2. L'ordinamento dei payoff è AA, AB, BA, BB, dove XY indica il risultato quando il giocatore 1 sceglie X e il giocatore 2 sceglie Y.

Giocatore 1: 9, 8, 5, 10.

Giocatore 2: 5, 6, 4, 8.

**Domanda A:** Specifica TUTTI gli equilibri di Nash.

Definiamo la matrice dei payoff.

		2	
		A	B
1	A	9,5	8,6
	B	5,4	10,8

La prima cella in alto a sinistra contiene il payoff 9 per il giocatore 1 e il payoff 5 per il giocatore 2; la cella in alto a destra contiene il payoff 8 per il giocatore 1 e il payoff 6 per il giocatore 2; la cella in basso a sinistra contiene il payoff 5 per il giocatore 1 e il payoff 4 per il giocatore 2; la cella in basso a destra contiene il payoff 10 per il giocatore 1 e il payoff 8 per il giocatore 2.

Considero il giocatore 1 (giocatore riga).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 1 se il giocatore 2 (giocatore colonna) sceglie la strategia A? La strategia migliore è scegliere A perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 9 (rispetto ad un payoff di 5).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 1 se il giocatore 2 sceglie la strategia B? La strategia migliore è scegliere B perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 10 (rispetto ad un payoff di 8). Il giocatore 1 non ha una strategia dominante.

Considero ora il giocatore 2 (giocatore colonna).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 2 se il giocatore 1 sceglie la strategia A? La strategia migliore è scegliere B perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 6 (rispetto ad un payoff di 5).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 2 se il giocatore 1 sceglie la strategia B? La strategia migliore è scegliere B perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 8 (rispetto ad un payoff di 4). La strategia B è la strategia dominante per il giocatore 2, perché il payoff è maggiore, qualsiasi sia la scelta del giocatore 1.

In questo gioco è presente un unico equilibrio di Nash in (B,B), in corrispondenza del quale il giocatore 1 ottiene un payoff pari a 10 e il giocatore 2 ottiene un payoff pari a 8.

**Domanda B:** Specifica TUTTI gli altri risultati (che non sono equilibri di Nash), che dominano in senso paretiano gli eventuali equilibri di Nash.

Non c'è nessun altro risultato che domina in senso paretiano l'equilibrio di Nash corrispondente alla coppia di strategie (B, B). L'equilibrio di Nash trovato al punto A è anche efficiente in senso paretiano perché nessuno dei due giocatori desidera spostarsi e cambiare strategia. In altre parole, partendo dall'equilibrio di Nash rappresentato dalla coppia di strategie (B, B) nessuno dei due giocatori ha la possibilità di migliorare il proprio payoff senza peggiorare il payoff dell'altro giocatore.

#### **Esercizio 4.**

Nei prossimi due punti, lo studente dovrà considerare un gioco simultaneo e senza comunicazione tra due giocatori, 1 e 2, ciascuno dei quali può scegliere una delle due opzioni A oppure B. I payoff per i due giocatori sono dati di seguito, il primo per il giocatore 1 e il secondo per il giocatore 2. L'ordinamento dei payoff è AA, AB, BA, BB, dove XY indica il risultato quando il giocatore 1 sceglie X e il giocatore 2 sceglie Y.

Giocatore 1: 3, 9, 2, 5.

Giocatore 2: 1, 4, 5, 6.

**Domanda A:** Specifica TUTTI gli equilibri di Nash.

Definiamo la matrice dei payoff.

		2	
		A	B
1	A	3,1	9,4
	B	2,5	5,6

La prima cella in alto a sinistra contiene il payoff 3 per il giocatore 1 e il payoff 1 per il giocatore 2; la cella in alto a destra contiene il payoff 9 per il giocatore 1 e il payoff 4 per il giocatore 2; la cella in basso a sinistra contiene il payoff 2 per il giocatore 1 e il payoff 5 per il giocatore 2; la cella in basso a destra contiene il payoff 5 per il giocatore 1 e il payoff 6 per il giocatore 2.

Considero il giocatore 1 (giocatore riga).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 1 se il giocatore 2 (giocatore colonna) sceglie la strategia A? La strategia migliore è scegliere A perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 3 (rispetto ad un payoff di 2).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 1 se il giocatore 2 sceglie la strategia B? La strategia migliore è scegliere A perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 9 (rispetto ad un payoff di 5). La strategia A è la strategia dominante per il giocatore 1, perché il payoff è maggiore, qualsiasi sia la scelta del giocatore 2.

Considero ora il giocatore 2 (giocatore colonna).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 2 se il giocatore 1 sceglie la strategia A? La strategia migliore è scegliere B perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 4 (rispetto ad un payoff di 1).

Qual è la strategia migliore per il giocatore 2 se il giocatore 1 sceglie la strategia B? La strategia migliore è scegliere B perché in questo modo ha la possibilità di ottenere un payoff di 6 (rispetto ad un payoff di 5). La strategia B è la strategia dominante per il giocatore 2, perché il payoff è maggiore, qualsiasi sia la scelta del giocatore 1.

In questo gioco è presente un unico equilibrio di Nash in (A,B), in corrispondenza del quale il giocatore 1 ottiene un payoff pari a 9 e il giocatore 2 ottiene un payoff pari a 4.

**Domanda B:** Specifica TUTTI gli altri risultati (che non sono equilibri di Nash), che dominano in senso paretiano gli eventuali equilibri di Nash.

Non c'è nessun altro risultato che domina in senso paretiano l'equilibrio di Nash corrispondente alla coppia di strategie (A, B). L'equilibrio di Nash trovato al punto A è anche efficiente in senso paretiano perché nessuno dei due giocatori desidera spostarsi e cambiare strategia. In altre





parole, partendo dall'equilibrio di Nash rappresentato dalla coppia di strategie (A, B) nessuno dei due giocatori ha la possibilità di migliorare il proprio payoff senza peggiorare il payoff dell'altro giocatore.



parole, partendo dall'equilibrio di Nash rappresentato dalla coppia di strategie (A, B) nessuno dei due giocatori ha la possibilità di migliorare il proprio payoff senza peggiorare il payoff dell'altro giocatore.

**Exercise** (Social Security in Diamond Overlapping Generations Model - Exam #2 Fall 2004).

Consider the Diamond overlapping generations model.  $L_t$  individuals are born in period  $t$  and live for two periods, working and saving in the first and living off capital in the second period. Assume population is growing at a constant rate,  $n$ , and there is no technological progress,  $g = 0$ , so that we can normalize  $A = 1$ . Markets are competitive and labor and capital are paid their marginal products. There is no capital depreciation ( $\delta = 0$ ). Utility is logarithmic and, for simplicity, we assume that the individual discount rate is zero, ie,  $\rho = 0$ .

$$U = \log(c_t) + \log(c_{t+1}).$$

The production function in per capita terms is

$$y_t = f(k_t) = k_t^\alpha.$$

The government taxes each young individual an amount  $T$ . It allocates a fraction  $\gamma$  of this amount to an Individual Retirement Account. This fraction is used to purchase capital and the individual receives  $(1 + r_{t+1})\gamma T$  when old. The remaining fraction  $(1 - \gamma)$  is used to pay retirement benefits to the current old. Therefore, when he retires, the individual gets a benefit  $(1 + n)(1 - \gamma)T$ .

(a) What kind of social security system is this? Is it funded, unfunded or a mixture of the two? Explain. Also explain why  $(1 + n)$  appears in the benefit formula.

**Answer.** This social security system is partially funded and partially unfunded. There is a fraction  $\gamma$  of taxes that is invested and used to pay retirement benefits to the current young when they are old in period  $t + 1$ , but the remaining fraction is used to pay benefits to the current old. An unfunded (or pay as you go) system would have  $\gamma = 0$  and a fully funded system would have  $\gamma = 1$ .  $(1 + n)$  appears in the benefit formula because population grows at rate  $n$ . Therefore, in period  $t + 1$  there are  $L_t(1 + n)$  young people paying taxes, which are partially used to pay benefits to  $L_t$  people born in period  $t$ .

(b) Write down the budget constraint faced by an individual born at time  $t$ .

**Answer.**

$$c_{t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t - c_t - T) + (1 + r_{t+1})\gamma T + (1 + n)(1 - \gamma)T.$$

We can simplify this to get

$$c_{t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t - c_t) + (1 - \gamma)(n - r_{t+1})T.$$

- (c) Use the budget constraint and the individual's utility function to solve for first period consumption  $c_t$ , and first period savings  $s_t$ . [Hint: You should get a function for savings that depends on the wages and the social security tax in the following way:  $s_t = Bw_t - Z_tT$ , where  $Z_t$  is a function of  $n$ ,  $\gamma$  and the interest rate at  $t+1$  ( $1+r_{t+1}$ ).]

**Answer.** The Euler equation is given by

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = 1 + r_{t+1}$$

Substituting in the budget constraint gives first period consumption

$$c_t = \frac{1}{2}w_t + \frac{(1-\gamma)(n-r_{t+1})}{2(1+r_{t+1})}T$$

First period savings is given by

$$s_t = w_t - c_t - T$$

Substituting for  $c_t$  gives

$$s_t = \frac{1}{2}w_t - \left[ 1 + \frac{(1-\gamma)(n-r_{t+1})}{2(1+r_{t+1})} \right] T$$

So,  $B = 1/2$  and  $Z_t = 1 + \frac{(1-\gamma)(n-r_{t+1})}{2(1+r_{t+1})}$ .

- (d) Use the savings function derived in part (c) and the production function to determine the relationship between  $k_{t+1}$  and  $k_t$ . Assume  $T$  is not too large and draw a graph of the relationship between  $k_{t+1}$  and  $k_t$  such that there are two steady states for  $k$ . Which of these two steady states is stable? Explain your reasoning.

**Answer.** Total capital stock is equal to savings by the consumers in the first period plus the amount allocated to the Individual Retirement Account (which is used to purchase capital):

$$K_{t+1} = s_tL_t + \gamma T L_t$$

It follows that

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} \left( \frac{1}{2}w_t - Z_tT + \gamma T \right)$$

Using the production function, we know that

$$w_t = (1-\alpha)k_t^\alpha$$

Substituting above, we get, after some algebra

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{1}{1+n} \left[ \frac{1}{2}(1-\alpha)k_t^\alpha - (1-\gamma) \left( \frac{r_{t+1} + n + 2}{2(1+r_{t+1})} \right) T \right] \\ k_{t+1} &= m(k_t, k_{t+1}, \gamma, T) \end{aligned} \quad (1)$$

There are two steady state levels of  $k$ , see figure 1. The one to the right is stable because it cuts the 45 degree line from above.

- (e) For this question, assume we are at the stable steady state found in part (d). Now assume that the government decides to allocate a higher fraction of taxes to the Individual Retirement Account, ie,  $\gamma$  increases. How does this affect the steady state value of  $k$ ? What is the effect on welfare of current old and future generations if the economy is initially in a steady state that is dynamically efficient? What happens if the initial steady state is dynamically inefficient?

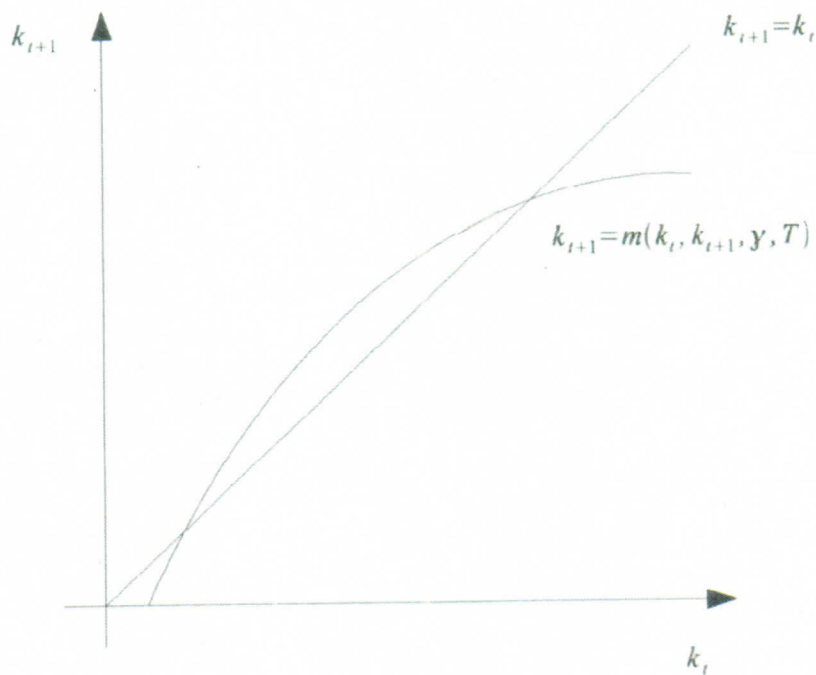


Figure 1: The Dynamic System, Equation (1).

**Answer.** When  $\gamma$  increases, the curve describing the relationship between  $k_{t+1}$  and  $k_t$  shifts up. The steady state value of  $k$  increases. If the economy is initially in a dynamically efficient steady state, welfare of future generations increases because the economy will get closer to the golden rule level of  $k$ . If the initial steady state is dynamically inefficient, the increase in  $k$  reduces welfare of future generations because  $k$  is above the golden rule. The current old lose in all cases, because they receive smaller benefits. Note that  $(1+n)(1-\gamma)T$  goes down.



