Business Analytics and Decisions Science

Teoria della dualità
A.A. 2018-2019

Argomenti

- **Problema duale**
- Proprietà della coppia primale-duale

Problema duale

- Ad ogni problema di PL, detto **primale**, risulta associato un altro problema, detto **duale**, costruito utilizzando gli stessi coefficienti (trasposti)

- Le soluzioni dei due problemi sono tra loro strettamente legate

- La soluzione del problema duale fornisce utili informazioni sulla soluzione del problema primale

Problema duale

Si consideri un problema P di PL in forma standard

$$
\begin{aligned}
&\min z(x) = c^T x \\
&s.v. \quad Ax = b \\
&x \geq 0;
\end{aligned}
$$

con $A \in R^{mxn}$, $b \in R^m$ e $x \in R^n$

Al problema P rimane associato il problema D

$$max\, w(y) = b^T y$$

$$s.v.$$

$$A^T y \leq c$$

Problema duale

È immediato osservare che, mentre il primale è un problema di minimo, il duale è un problema di massimo e che i termini noti di un problema sono i coefficienti della funzione obiettivo dell'altro.

Inoltre, a ciascuna variabile del primale corrisponde univocamente un vincolo del duale e a ciascuna variabile del duale è univocamente associato un vincolo del primale.

Problema duale

A ogni formulazione di un problema di PL diversa da quella standard resta associato, conformemente alla formulazione introdotta, un problema duale.

Si consideri, ad esempio, il seguente problema primale:

$$\begin{aligned} \min z(x) \; &= \; c^T x \\ s.v. \quad Ax \; &\geq \; b \\ x \; &\geq \; 0 \end{aligned}$$

Problema duale

Esso può, equivalentemente, essere riscritto nel modo seguente:

$$\min z(x,s) = c^T x + 0^T s$$

$$s.v.$$

$$Ax - I_m s = b$$

$$x, s \geq 0;$$

dove $s \in R^m$ rappresenta il vettore delle variabili ausiliarie di «**surplus**».

Problema duale

Pertanto, il corrispondente problema duale risulta essere:

$$\begin{aligned} \max w(y) \ &= \ b^T y \\ s.v. \quad A^T y \ &\leq \ c \\ -I_m y \ &\leq \ 0 \end{aligned}$$

ovvero, equivalentemente:

$$\begin{aligned} \max w(y) \ &= \ b^T y \\ s.v. \ A^T y \ &\leq \ c \\ y \ &\geq \ 0 \end{aligned}$$

Da questo esempio, si può desumere che a ogni vincolo di disuguaglianza del primale è associata una variabile vincolata in segno nel duale.

Problema duale

Si consideri ora il seguente problema primale, in cui le variabili di decisione non sono vincolate in segno:

$$\min z(x) = c^T x$$
$$s.v.$$
$$Ax = b.$$

Ponendo

$$x = x^{+} - x^{-}$$
$$x^{+}, x^{-} \geq 0$$

(ogni variabile non vincolata in segno può essere sostituita da una coppia di variabili non negative).

Problema duale

Il problema primale può riscriversi in maniera equivalente come

$$\begin{aligned} \min z(x^+, x^-) &= c^T x^+ - c^T x^- \\ s.v. \quad Ax^+ - Ax^- &= b \\ x^+, x^- &\geq 0 \end{aligned}$$

il cui duale risulta

$$\begin{aligned} \max w(y) &= b^T y \\ s.v. \\ A^T y &\leq c \\ -A^T y &\leq -c. \end{aligned}$$

Problema duale

Osservando che i vincoli del duale possono riscriversi nella forma $A^T y = c$, il duale è equivalente a

$$\max w(y) = b^T y$$
$$s.v.\ \ A^T y = c.$$

Ciò significa che, se le variabili del primale non sono vincolate in segno, i vincoli del duale sono espressi in termini di uguaglianza.

Problema duale

Riassumendo, l'insieme delle proprietà di «simmetria» nella coppia primale-duale viene espresso attraverso le seguenti regole generali:

- ✓ a un vincolo di disuguaglianza nel primale corrisponde una variabile vincolata in segno nel duale;
- ✓ a un vincolo di uguaglianza nel primale corrisponde una variabile libera in segno nel duale;
- ✓ a una variabile vincolata in segno nel primale corrisponde un vincolo di disuguaglianza nel duale;
- ✓ a una variabile libera in segno nel primale corrisponde un vincolo di uguaglianza nel duale;
- ✓ se la funzione obiettivo del primale è in forma di minimo, la funzione obiettivo del duale è in forma di massimo e viceversa,

ovvero, più formalmente, dal seguente teorema, la cui dimostrazione ricalca le modalità utilizzate per costruire il duale dei vari problemi di PL introdotti in precedenza.

Problema duale

- Teorema 7.2

Dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = c^T x$$

$$
\begin{aligned}
s.v.& \\
a^T{}_i x &\geq bi, & i \in I_1 \\
a^T{}_i x &\leq bi, & i \in I_2 \\
a^T{}_i x &= bi, & i \in I_3 \\
x_j &\geq 0, & j \in J_1 \\
x_j &\leq 0, & j \in J_2 \\
x_j &\ libera, & j \in J_3
\end{aligned}
$$

Problema duale

- Teorema 7.2

il suo duale è

$$\max w(y) = b^T y$$

$$
\begin{array}{llll}
s.v. & & & \\
y^T A_j & \leq & c_j\,, & j \in J_1 \\
y^T A_j & \geq & c_j\,, & j \in J_2 \\
y^T A_j & = & c_j\,, & j \in J_3 \\
y_i & \geq & 0, & i \in I_1 \\
y_i & \leq & 0, & i \in I_2 \\
y_i & \multicolumn{2}{l}{libera,} & i \in I_3.
\end{array}
$$

Primale $\min z(x) = c^T x$	**Duale** $\max w(y) = b^T y$
$a^T{}_i x \geq bi$	$y_i \geq 0$
$a^T{}_i x \leq bi$	$y_i \leq 0$
$a^T{}_i x = bi$	$y_i\ libera$
$x_j \geq 0$	$y^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$y^T A_j \geq c_j$
$x_j\ libera$	$y^T A_j = c_j$

Problema duale

- Esempio

Dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
\min z(x) &= 8x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 7x_4 \\
s.v.\ & \\
4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 2x_4 &\leq 27 \\
-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 &\geq 12 \\
x_1 - 2x_4 &= 20 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
x_4 &\leq 0,
\end{aligned}
$$

Problema duale

- Esempio

il corrispondente problema duale è

$$\max w(y) = 27y_1 + 12y_2 + 20y_3$$

$$s.v.$$

$$\begin{gathered} 4y_1 - y_2 + y_3 \leq 8 \\ -6y_1 + 3y_2 \leq 5 \\ 8y_1 + 5y_2 = 12 \\ 2y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geq 7 \\ y_1 \leq 0 \\ y_2 \geq 0. \end{gathered}$$

Problema duale

Quando il primale è dato nella forma

$$\max z(x) = c^T x$$
$$s.v.$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

esso può, equivalentemente, essere riscritto nel modo seguente:

$$\min z(x,s) = -c^T x - 0^T s$$
$$s.v. \quad Ax + I_m s = b$$
$$x, s \geq 0$$

dove $s \in R^m$ rappresenta il vettore delle variabili ausiliarie di «**slack**».

Problema duale

Il duale risulta essere

$$\begin{aligned} \max w(y') &= b^T y' \\ s.v.\, A^T y' &\leq -c \\ I_m y' &\leq 0 \end{aligned}$$

ovvero, rimpiazzando y' con $y = -y'$,

$$\begin{aligned} \min w(y) &= b^T y \\ s.v.\ A^T y &\geq c \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

In altri termini, se la funzione obiettivo del primale è da massimizzare, il corrispondente duale è un problema di minimo.

Primale $\min z(x) = c^T x$	**Duale** $\max w(y) = b^T y$
$a^T{}_i x \geq bi$	$y_i \geq 0$
$a^T{}_i x \leq bi$	$y_i \leq 0$
$a^T{}_i x = bi$	y_i *libera*
$x_j \geq 0$	$y^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$y^T A_j \geq c_j$
x_j *libera*	$y^T A_j = c_j$

Problema duale

- Esempio

Dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = 6x_1 + 8x_2 + 4x_3$$

$$s.v.$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$3x_1 + 5x_2 = 15$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

Problema duale

- Esempio

il corrispondente problema duale è

$$\min w\,(y) = 10y_1 + 15y_2 + 20y_3$$

$s.v.$

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 + 5y_3 &\geq 6 \\ y_1 + 5y_2 + 2y_3 &\geq 8 \\ 2y_1 + 4y_3 &= 4 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

Argomenti

- Problema duale
- **Proprietà della coppia primale-duale**

Proprietà della coppia primale-duale

- Introduzione

Dato il problema (P) primale in forma standard:

$$\min z(x) = c^T x \qquad (7.1)$$

$$s.v.$$

$$Ax = b \qquad (7.2)$$

$$x \geq 0 \qquad (7.3)$$

a cui corrisponde il problema duale (D):

$$\max w(y) = b^T y \qquad (7.4)$$

$$s.v.$$

$$A^T y \leq c \qquad (7.5)$$

Valgono le seguenti proprietà.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.3

<u>Il duale del problema duale è il problema primale.</u>

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dalle regole di costruzione del duale.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

$$s.v.$$

$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0;$$

il corrispondente problema duale (D) è

$$\min w(y) = 2y_1 + 8y_2$$

$$s.v.$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 2$$
$$3y_1 - y_2 \geq 4$$
$$-5y_1 + y_2 \leq 7$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \leq 0.$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

A sua volta, il duale del problema (D) è

$$\max z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$
$$s.v.\, x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0;$$

che corrisponde al problema (P).

Proprietà della coppia primale-duale

- **Teorema di Dualità Debole**

  Sia data una coppia di problemi P-D che ammettono soluzione ammissibile. Allora, per ogni soluzione ammissibile $\bar{x}$ di P e $\bar{y}$ di D, vale la relazione:

$$b^T\bar{y} \leq c^T\bar{x}$$

<u>Dimostrazione</u>

Essendo $\bar{y}$ ammissibile

$A^T\bar{y} \leq c$ ovvero $\bar{y}^T\boldsymbol{A} \leq c^T$

Moltiplicando ambo i membri per $\bar{x}$ ammissibile

$$\bar{y}^T\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{y}^T\boldsymbol{b} \leq c^T\bar{x}$$

Proprietà della coppia primale-duale

- In generale il Teorema di Dualità Debole stabilisce che il valore di funzione obiettivo del problema di massimo è un limite inferiore per quello di minimo.
- La differenza $c^T\bar{x}$ - $b^T\bar{y}$ è non negativa e si chiama **gap di ottimalità**
- Se il gap è nullo, le corrispondenti soluzioni sono ottime

Proprietà della coppia primale-duale

Corollario

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di P e $\bar{y}$ una soluzione ammissibile di D.

Se $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ allora $(\bar{x}, \bar{y})$ sono soluzione ottime per i rispettivi problemi.

<u>Dimostrazione</u>

Supponiamo che $\bar{x}$ non sia ottima. Esisterebbe una nuova soluzione $\tilde{x}$ tale che $c^T\tilde{x} \leq c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ e questo violerebbe il teorema di dualità debole.

Proprietà della coppia primale-duale

Teorema di Dualità Forte

Se il problema primale ha soluzione ottima finita allora anche il suo duale possiede una soluzione ottima ed il valore delle due soluzioni è uguale.

Dimostrazione

Sia x^* la soluzione ottima associata alla base B

$$x^*{}_B = A_B^{-1}b;$$
$$x^*{}_N = 0,$$

di valore pari a $z^* = c_B^T A_B^{-1}\mathrm{b}$. Essendo soluzione ottima i coefficienti di costo ridotto sono non negativi

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0^T.$$

Proprietà della coppia primale-duale

In particolare

$c_N{}^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0^T$ ovvero $c_N{}^T \geq c_B^T A_B^{-1} A_N$

Sia $\quad y_B{}^T = c^T{}_B A^{-1}{}_B$.

Si osserva che $\bar{y}$ è soluzione ammissibile del problema duale.

$y_B{}^T A = [y_B{}^T A_B \; y_B{}^T A_N] = [c^T{}_B A^{-1}{}_B A_B \mid c^T{}_B A^{-1}{}_B A_N] =$

$= [c^T{}_B \mid c^T{}_B A^{-1}{}_B A_N] \leq [c^T{}_B \mid c_N{}^T]$

$y_B{}^T b = c^T{}_B A^{-1}{}_B b = c^T{}_B x^*{}_B$

Il gap di ottimalità è nullo e le due soluzioni sono ottime

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 14x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 30x_4$$
$$s.v.$$
$$7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 4$$
$$5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

il cui problema duale risulta essere

$$\max w(y) = 4y_1 + 6y_2$$
$$s.v.$$
$$7y_1 + 5y_2 \leq 14$$
$$6y_1 - 3y_2 \leq -6$$
$$3y_1 + 6y_2 \leq 3$$
$$-6y_1 + 5y_2 \leq 30.$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

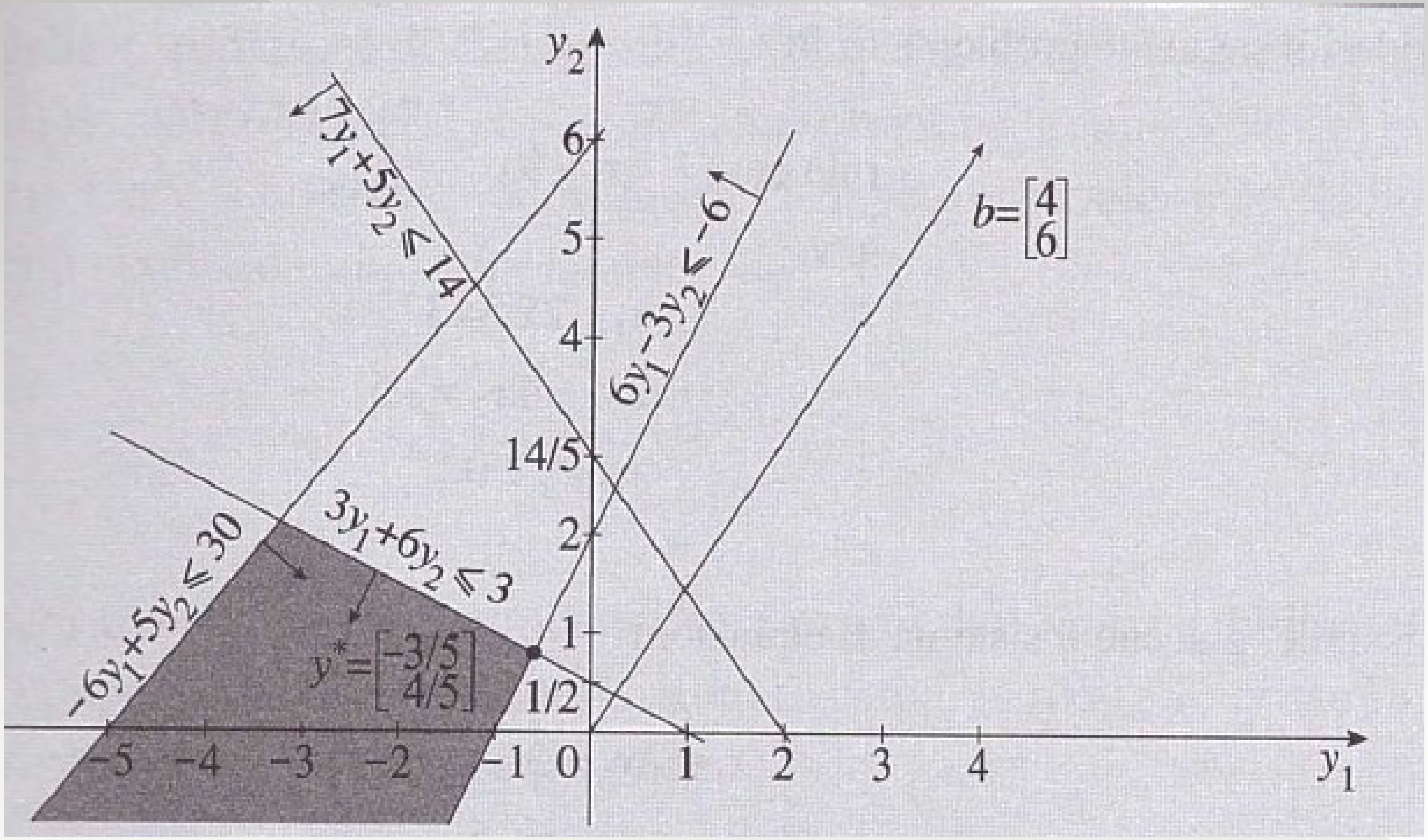
La soluzione ottima del problema primale è $x^* = [0\ 2/15\ 16/15\ 0]^T$, con valore $z* = 12/5$.

Di conseguenza, in base al teorema di dualità forte, il problema duale ha soluzione ottima $y*$ avente valore $w^* = 12/5$.

Infatti, risolvendo graficamente il problema duale (vedi Figura 7.2), si ricava che $y^* = [-3/5\ 4/5]^T$, a cui corrisponde il valore $w^* = 12/5$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Figura 7.2 Soluzione grafica del problema duale



Proprietà della coppia primale-duale

- Corollario

  Se il problema primale è illimitato inferiormente, allora il problema duale non ammette soluzioni ammissibili.

Dimostrazione.

Si supponga, per assurdo, che il problema primale sia illimitato inferiormente e che esista una soluzione ammissibile $\bar{y}$ per il problema duale.

Per il teorema di dualità debole, deve essere $c^T x \geq b^T \bar{y}$, per ogni $x \in P$, contraddicendo l'ipotesi che il primale sia illimitato inferiormente ($b^T \bar{y}$ sarebbe infatti una limitazione inferiore per tutti i valori della funzione obiettivo del problema primale).

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

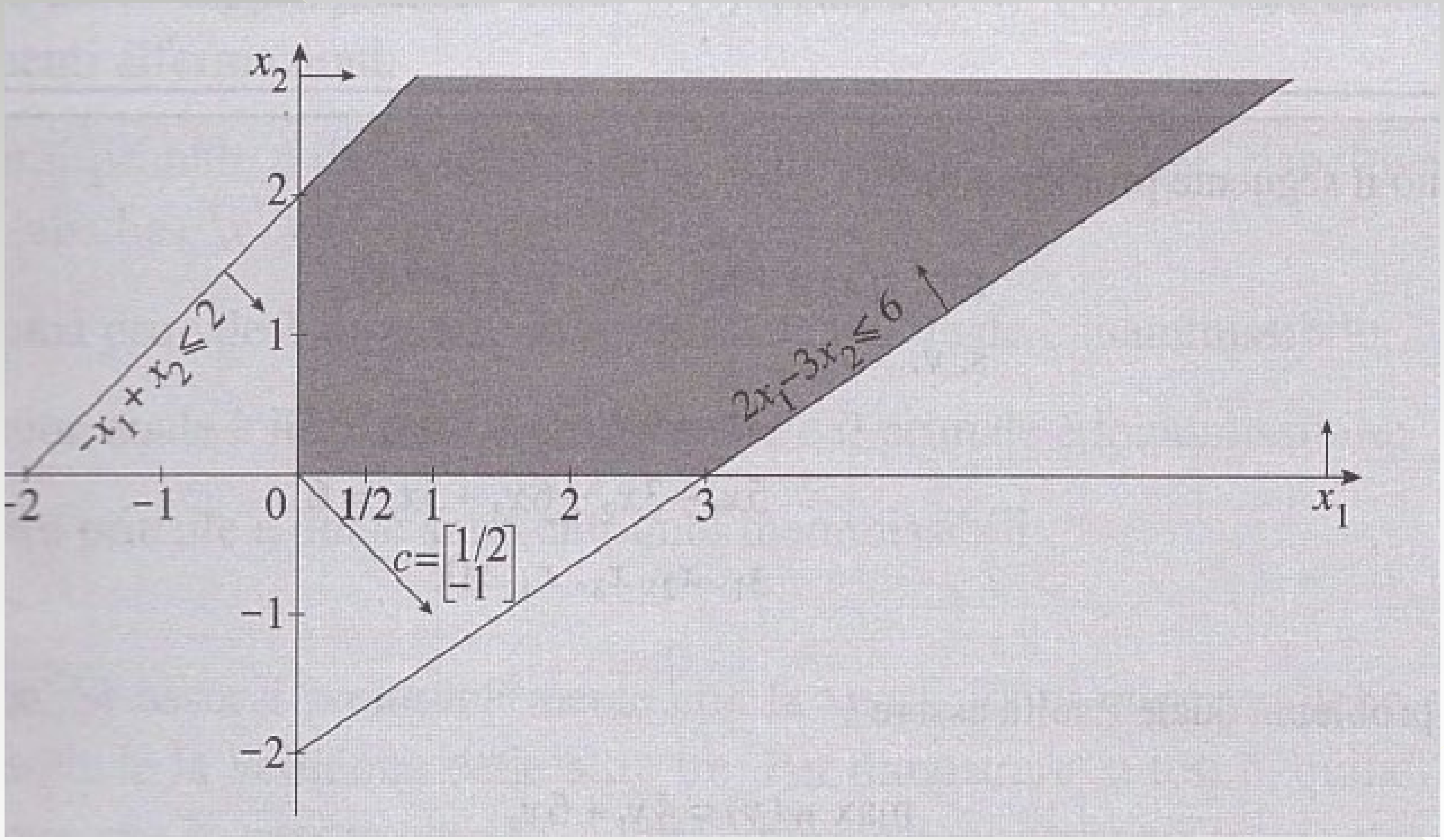
Dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= 1/2x_1 - x_2 \\ s.v.\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

È dimostrato per via grafica essere illimitato inferiormente (vedi Figura 7.1)

Proprietà della coppia primale-duale

- Figura 7.1 – Problema illimitato inferiormente



Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Il corrispondente problema duale

$$\max w(y) = 6y_1 + 2y_2$$
$$s.v.$$
$$2y_1 - y_2 \leq 1/2$$
$$-3y_1 + y_2 \leq -1$$
$$y_1, y_2 \leq 0$$

è inammissibile.

Proprietà della coppia primale-duale

Se il problema primale è inammissibile il duale non ammette ottimo (inammissibile o illimitato)

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO SUPERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO INFERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI

Esempio

PRIMALE INAMMISSIBILE – DUALE INAMMISSIBILE

$$\min z(x) = x_1$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \text{ libere}$$

$$max\, w(y) = y_1 + y_2$$

$$y_1 - y_2 = 1$$
$$y_1 - y_2 = 0$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Esempio

PRIMALE INAMMISSIBILE – DUALE ILLIMITATO

$$\min z(x) = x_1$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$max\, w(y) = y_1 + y_2$$

$$y_1 - y_2 \leq 1$$
$$y_1 - y_2 \leq 0$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

Data una coppia di soluzioni ottime, una per il problema primale e una per il duale, si può fornire un'ulteriore caratterizzazione delle stesse avvalendosi delle cosiddette «**condizioni di ortogonalità**».

Sia $\bar{x} \in R^n$ una soluzione ammissibile del problema primale (7.1)–(7.3) e $\bar{y} \in R^m$ una soluzione ammissibile del problema duale (7.4)–(7.5); $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi se e solo se soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j=0, \text{ j=1,…,n.} \qquad (7.8)$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

Dimostrazione.

Si osservi preliminarmente che, in virtù dell'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi, le condizioni di ortogonalità (7.8) possono equivalentemente riscriversi come un'unica equazione

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0 \qquad (7.9)$$

dal momento che le(7.8) implicano il soddisfacimento della (7.9) e viceversa.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

(*Condizione necessaria*).

Si supponga che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano soluzioni ottime per i rispettivi problemi e dimostriamo che soddisfano le condizioni di ortogonalità.

Dal **teorema di dualità forte** si ha che

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$$

ovvero,

$$c^T \bar{x} - \bar{y}^T b = 0 \qquad (7.10)$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

(*Condizione necessaria*).

Essendo $\bar{x}$ soluzione ammissibile per il primale, la (7.10) può scriversi come

$$c^T \bar{x} - \bar{y}^T A \bar{x} = 0$$

ovvero,

$$(c^T - \bar{y}^T A)\, \bar{x} = 0.$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

(*Condizione sufficiente*).

Se le soluzioni x e y soddisfano la relazione (7.9), si ha che

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \qquad (7.11)$$

Essendo $\bar{x}$ soluzione ammissibile per il primale, la (7.11) è equivalente a

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b.$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

(*Condizione sufficiente*).

Dal **Corollario 7.1**, segue l'ottimalità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi.

Le condizioni di ortogonalità rappresentano uno strumento molto utile e versatile nell'ambito della teoria della dualità.

In particolare, possono essere utilizzate per «**certificare**» agevolmente l'ottimalità di una data soluzione per un problema di PL.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4$$
$$s.v.$$
$$-2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 15$$
$$4x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 31$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Sapendo che la soluzione ottima del duale è $y^* = [-2/3\ 2/3]^T$, determinare applicando le condizioni di ortogonalità la soluzione ottima del problema primale.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Operativamente, si inizia con il costruire il duale del problema primale in esame:

$$\max w(y) = 15y_1 + 31y_2$$
$$s.v.$$
$$-2y_1 + 4y_2 \le 4$$
$$5y_1 + 8y_2 \le 2$$
$$8y_1 - 2y_2 \le -1$$
$$5y_1 + 6y_2 \le 2$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Le condizioni di ortogonalità sono:

$$\begin{cases} (4 + 2y_1 - 4y_2)x_1 = 0 \\ (2 - 5y_1 - 8y_2)x_2 = 0 \\ (-1 - 8y_1 + 2y_2)x_3 = 0 \\ (2 - 5y_1 - 6y_2)x_4 = 0 \end{cases}$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Per determinare la soluzione ottima del problema primale, si osserva che, in corrispondenza di y^*, il primo e il secondo vincolo del problema duale sono soddisfatti per uguaglianza, mentre il terzo e il quarto vincolo sono soddisfatti per disuguaglianza stretta.

Di conseguenza, dalle condizioni di ortogonalità, si ricava che la soluzione ottima x^* del problema primale è tale per cui $x^*_3 = x^*_4 = 0$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Dal momento che x^* deve essere ammissibile, segue che x^*_1 e x^*_2 devono essere soluzioni del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 15 \\ 4x_1 + 8x_2 = 31 \end{cases}$$

ovvero, $x^*_1 = 35/36$ e $x^*_2 = 61/18$.

Riassumendo, $x^* = [35/36\ 61/18\ 0\ 0]^T$ è la soluzione ottima del problema primale, avente valore $z^* = w^* = 32/3$.

Proprietà della coppia primale-duale

Più dettagliatamente, si supponga che il problema primale ammetta soluzione ottima finita (e non degenere) e si indichi con x^* la soluzione ottima di base rispetto all'insieme di indici di base B.

Dal momento che $x^*_j > 0, j \in B$, per soddisfare le condizioni di ortogonalità (7.8), la soluzione ottima duale y^* deve essere soluzione del seguente sistema di equazioni:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \; j \in B \qquad (7.12)$$

ovvero, in forma compatta,

$$A^T{}_B y = c_B.$$

Proprietà della coppia primale-duale

In altri termini, dal momento che l'insieme di indici di base B è formato da m elementi, le (7.12) definiscono un sistema quadrato di m equazioni nelle incognite $y_i, i = 1, \dots, m$.

Essendo le colonne della matrice A_B linearmente indipendenti, il sistema (7.12) ha soluzione unica y^* data da

$$y^{*T} = c_B^T A_B^{-1} \quad (7.13)$$

Si può verificare che tale soluzione coincide con quella definita nella dimostrazione del teorema di dualità forte.

Proprietà della coppia primale-duale

Essa prende il nome di soluzione «**complementare**» a x^* rispetto all'insieme di indici di base B e ad essa corrisponde una soluzione di base per il problema duale, una volta che tale problema venga posto in forma standard.

Nel caso di soluzione di base ottima degenere per il problema primale (con coefficienti di costo ridotto non negativi), è facile rendersi conto che la soluzione y^* definita dalla (7.13) non è l'unica soluzione ammissibile duale a soddisfare le condizioni di ortogonalità.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4$$
$$s.v.$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 9$$
$$-8x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 9$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

La soluzione ottima è $x^* = [0\ 3\ 0\ 0]^T$, avente valore $z^* = 6$. Tale soluzione è una SBA degenere, rispetto all'insieme di indici di base B = {2,3}.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Il corrispondente problema duale è

$$\max w(y) = 9y_1 + 9y_2$$
$$s.v.$$
$$2y_1 - 8y_2 \leq 3$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 2$$
$$5y_1 - 4y_2 \leq 4$$
$$5y_1 + 3y_2 \leq 8$$

Per determinare la soluzione ottima duale y^*, si osserva che le condizioni di ortogonalità (7.8) per la coppia primale-duale in esame impongono che la soluzione ottima duale y^* deve soddisfare l'equazione $3y_1 + 3y_2 = 2$, giacché soltanto $x^*_2 > 0.$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Pertanto, si ottiene una sola equazione in due incognite, il che significa che il problema duale ammette infinite soluzioni ottime.

Esse possono essere determinate imponendo, ad esempio, $y^*_1 = k$ (da cui $y^*_2 = 2/3 - k$), e determinando l'intervallo di valori per il parametro k in corrispondenza dei quali sono soddisfatti tutti i vincoli del problema duale per la generica soluzione $y^* = [k, 2/3 - k]^T$, di valore $w^* = 6$.

Nel caso in esame, risulterà $k \leq 20/27$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Se si sceglie $k \;\; pari$ proprio all'estremo dell'intervallo (si osservi che, in generale, l'intervallo potrebbe essere anche limitato), si ottiene $y^* = [20/27, -2/27]^T$.

Si può agevolmente verificare che tale soluzione corrisponde alla soluzione complementare di x^* rispetto all'insieme di indici di base B e poteva essere ottenuta più semplicemente imponendo, oltre al soddisfacimento dell'equazione $3y_1 + 3y_2 = 3$, anche che $5y_1 - 4y_2 = 4$, ovvero il soddisfacimento all'uguaglianza del vincolo duale in corrispondenza della variabile di base degenere all'ottimo (x^*_3).

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

A tale soluzione corrisponde una soluzione di base per il problema duale, una volta ridotto in forma standard.

Dell'esistenza di una soluzione siffatta si è certi in virtù del Corollario 6.1.

Proprietà della coppia primale-duale

È importante sottolineare che le condizioni di ortogonalità possono scriversi per ogni coppia primale-duale.

Ad esempio, può risultare utile considerare il caso di problema primale in forma «simmetrica»

$$\min z(x) = c^T x \qquad (7.14)$$

$$s.v.$$

$$Ax \geq b \qquad (7.15)$$

$$x \geq 0 \qquad (7.16)$$

a cui è associato il seguente duale:

$$\max w(y) = b^T y \qquad (7.17)$$

$$s.v.$$

$$A^T y \leq c \qquad (7.18)$$

$$y \geq 0 \qquad (7.19)$$

Il Teorema 7.6 in questo caso si modifica nel seguente modo.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

Sia $\bar{x} \in R^n$ una soluzione ammissibile del problema primale (7.14)–(7.16) e $\bar{y} \in R^m$ una soluzione ammissibile del problema duale (7.17)–(7.19);

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per I rispettivi problemi se e solo se soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j=0, \; j=1,\dots,n; \qquad (7.20)$$

$$\bar{y}_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j - b_i) =0, \; i=1,\dots,m. \qquad (7.21)$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

Dimostrazione.

Analogamente a quanto visto nel Teorema 7.6, in virtù dell'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi, le condizioni di ortogonalità (7.20) e (7.21) possono equivalentemente riscriversi in modo compatto come

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0; \qquad (7.22)$$

$$\bar{y}^T(A\bar{x} - b) = 0, \qquad (7.23)$$

dal momento che le (7.20) implicano il soddisfacimento della (7.22) e viceversa, così come le (7.21) implicano il soddisfacimento della (7.23) e viceversa.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

(*Condizione necessaria*).

Si supponga che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano soluzioni ottime per i rispettivi problemi. Dal teorema di dualità forte si ha che

$$c^T\bar{x} - \bar{y}^T b \; = \; 0 \qquad (7.24)$$

Sottraendo e aggiungendo la stessa quantità $\bar{y}^T{}_A\bar{x}$ al primo membro della (7.24) si ottiene

$$c^T\bar{x} - \bar{y}^T A\bar{x} + \bar{y}^T A\bar{x} - \bar{y}^T b = 0$$

ovvero,

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} + \bar{y}^T(A\bar{x} - \; b) \; = \; 0 \qquad (7.25)$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

In virtù dell'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi, si ha che

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0$$

e

$$\bar{y}^T (A\bar{x} - b) = 0$$

quindi la (7.25) implica che le condizioni di ortogonalità (7.22) e (7.23) siano soddisfatte.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

(*Condizione sufficiente*).

Se le soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soddisfano le condizioni di ortogonalità (7.22) e (7.23), si ha che

$$c^T\bar{x} = \bar{y}^T A\bar{x}$$
$$\bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b$$

da cui

$$c^T\bar{x} = \bar{y}^T b.$$

Dal Corollario 7.1, essendo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili per i rispettivi problemi, ne segue anche l'ottimalità.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = 2x_1 + 5x_2$$
$$s.v.$$
$$6x_1 + 8x_2 \leq 48$$
$$2x_1 - 4x_2 \geq 10$$
$$3x_1 - 2x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La soluzione ottima è $x^* = [34/5 \ \ 9/10]^T$, avente valore $z^* = 181/10$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Il problema duale di (P) si può scrivere equivalentemente come

$$
\begin{gathered}
\min w(y) \;=\; 48y_1 \;-\; 10y_2 \;+\; 60y_3 \\
s.v. \\
6y_1 \;-\; 2y_2 \;+\; 3y_3 \;\geq\; 2 \\
8y_1 \;+\; 4y_2 \;-\; 2y_3 \;\geq\; 5 \\
y_1, y_2, y_3 \;\geq\; 0
\end{gathered}
$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Le condizioni di ortogonalità per tale coppia primale-duale diventano

$$\begin{cases} (6y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 2)x_1 = 0 \\ (8y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 5)x_2 = 0 \\ \quad y_1(48 - 6x_1 - 8x_2) = 0 \\ \quad y_2(2x_1 - 4x_2 - 10) = 0 \\ \quad y_3(60 - 3x_1 + 2x_2) = 0 \end{cases}$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Essendo $x^*_1 > 0$, $x^*_2 > 0$ e $3x^*_1 - 2x^*_2 < 60$, soddisfare le condizioni di ortogonalità implica risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 6y1 - 2y2 + 3y3 = 2 \\ 8y1 + 4y2 - 2y3 = 5 \\ y3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $y^* = [9/20 \;\; 7/20 \;\; 0]^T$, avente valore $w^* = 181/10$.