Università degli Studi
Mediterranea
di Reggio Calabria

DECISIONS_LAB
FOR COVID-19

Corso di Matematica per l'Economia

ESERCITAZIONE STUDIO DI FUNZIONE

Parte 3

Prof. **Massimiliano Ferrara**
Prof. **Bruno Antonio Pansera**

A cura della Dott.ssa **Mariangela Gangemi**

DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA
DiGiES
DIPARTIMENTO
GIURISPRUDENZA
ECONOMIA
SCIENZE UMANE
International Program
Terza Missione

Anno Accademico 2020-2021

Esercizio 5

Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = e^{x^2-1}$$

1. Dominio

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \quad x \in \left]-\infty; +\infty\right[$$

2. Simmetrie

$$f(-x) = e^{(-x)^2-1} = f(x)$$

La funzione è pari.

3. Intersezione con gli assi

ASSE X

Non ci sono intersezioni con l'asse *x*, perché la funzione esponenziale non si annulla mai.

ASSE Y

$$\begin{cases} y = e^{x^2-1} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{e} \\ x = 0 \end{cases}$$

Il grafico incontra l'asse delle ordinate nel punto $A\left(0;\frac{1}{e}\right)$.

4. Segno della funzione

Poniamo $f(x) > 0$

$$e^{x^2-1} > 0$$

La funzione è sempre positiva perché esponenziale.

5. Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{x^2-1} = e^{+\infty} = +\infty$$

Non esistono asintoti orizzontali; potrebbero esistere gli asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{x^2-1}}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Questo limite si presenta della forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che si risolve utilizzando il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to \pm\infty} 2x\left(e^{x^2-1}\right) = \pm\infty$$

Non esistono asintoti obliqui.

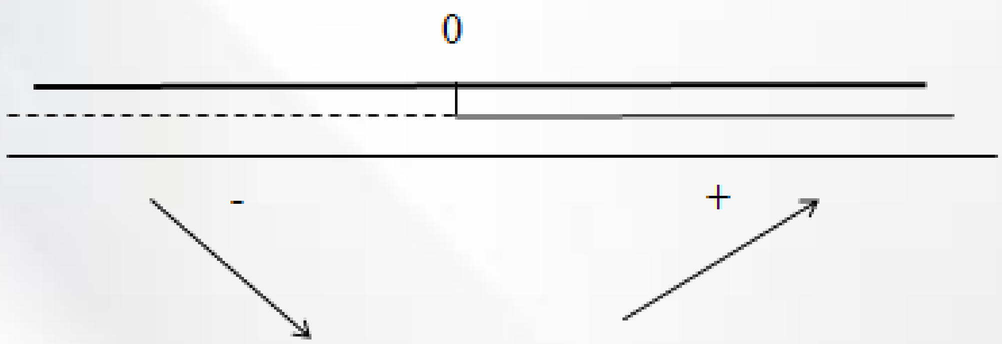
6. Derivata prima: crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi

$y' = 2x\left(e^{x^2-1}\right)$

$y' \geq 0$

1° Fattore: $2x \geq 0$ $\Rightarrow$ $x \geq 0$

2° Fattore: $e^{x^2-1} \geq 0$ $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$



$x = 0$ è un punto di minimo relativo.

7. Derivata seconda: concavità, convessità, flessi

$y'' = 2e^{x^2-1} + (2x)(2x)e^{x^2-1}$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$y'' = e^{x^2-1}(4x^2+2)$

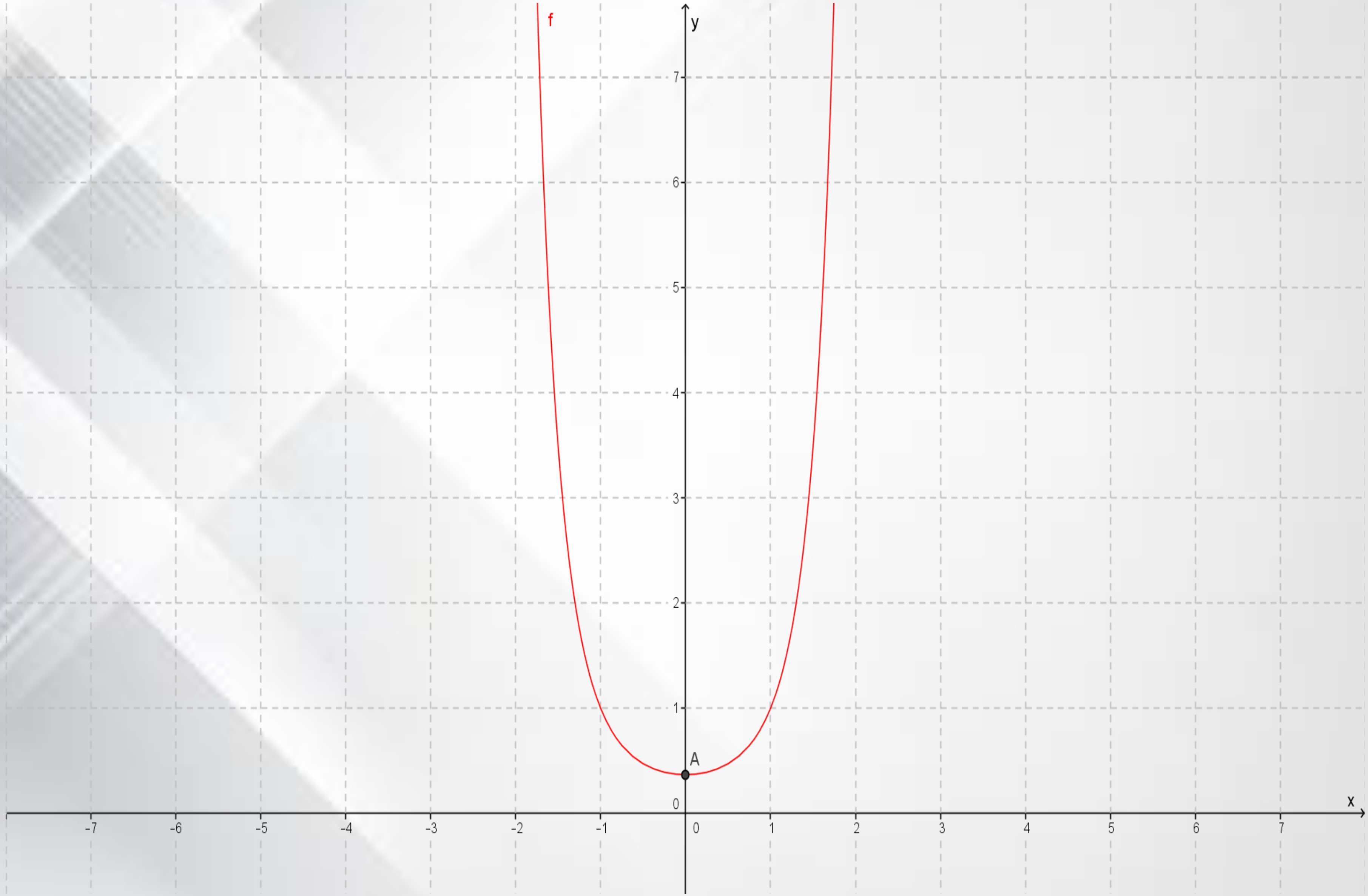
$y'' \geq 0$

1° Fattore: $e^{x^2-1} \geq 0 \qquad \Rightarrow \ \forall x \in \mathbb{R}$

2° Fattore: $4x^2 + 2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \ \forall x \in \mathbb{R}$

Dato che entrambi i fattori sono positivi la derivata seconda è sempre positiva. Pertanto la funzione volge la concavità verso l’alto. Non ci sono punti di flesso.

Il grafico della funzione è riportato nella figura:



Esercizio 6

Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = (x^2 + 2) \cdot e^{-x^2}$$

1. Dominio

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \quad x \in \,]-\infty; +\infty[$

2. Simmetrie

$f(-x) = [(-x)^2 + 2] \cdot e^{-(-x)^2} = f(x)$

La funzione è pari.

3. Intersezioni con gli assi

ASSE X

Non esistono intersezioni con l’asse x, perché sia l’esponenziale che il binomio non si annullano mai.

ASSE Y

$$\begin{cases} y = (x^2+2)\cdot e^{-x^2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il grafico incontra l’asse delle ordinate nel punto $A(0;2)$.

4. Studio del segno

$(x^2 + 2) \cdot e^{-x^2} > 0$

1° Fattore: $(x^2 + 2) > 0 \qquad \Rightarrow \ \forall x \in D$

2° Fattore: $e^{-x^2} > 0 \qquad \Rightarrow \ \forall x \in D$

La funzione dunque è sempre positiva.

5. Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x^2 + 2) \cdot e^{-x^2} = +\infty \cdot 0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Questo limite si presenta della forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; svolgendo i calcoli si ricava:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale completo.

6. Derivata prima: crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi

$y' = 2x \cdot e^{-x^2} + (x^2+2)(-2x) \cdot e^{-x^2}$

$y' = e^{-x^2}[2x - 2x(x^2+2)] = e^{-x^2}(2x - 2x^3 - 4x)$

$y' = e^{-x^2}(-2x - 2x^3)$

$y' \geq 0$

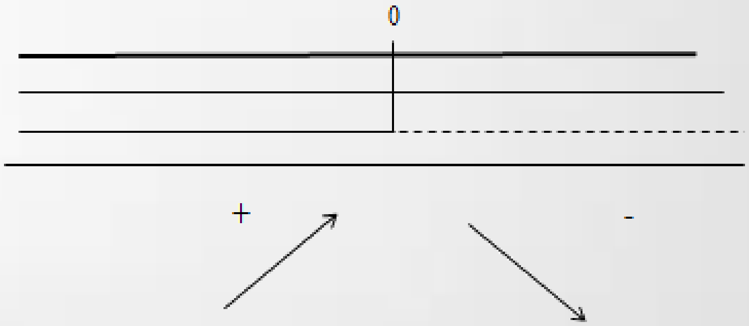
1° Fattore: $e^{-x^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \ \forall x \in D$

2° Fattore: $-2x - 2x^3 \geq 0 \quad \Rightarrow \ -x^3 - x \geq 0 \quad \Rightarrow -x(x^2+1) \geq 0$

$-x \geq 0 \quad \Rightarrow x \leq 0$

$x^2 + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \forall x \in D$

Il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo.



7. Derivata seconda: concavità, convessità, flessi

$$y'' = -2x \cdot e^{-x^2}(-2x - 2x^3) + e^{-x^2}(-2 - 6x^2) = e^{-x^2}[4x^2 + 4x^4 - 2 - 6x^2]$$

$$y'' = e^{-x^2}(4x^4 - 2x^2 - 2)$$

$$y'' \geq 0$$

1° Fattore: $e^{-x^2} \geq 0 \qquad \Rightarrow \forall x \in D$

2° Fattore: $4x^4 - 2x^2 - 2 \geq 0 \qquad \Rightarrow 2x^4 - x^2 - 1 \geq 0$

La disequazione precedente è una biquadratica e si risolve utilizzando l'incognita ausiliaria:

$$x^2 = t$$

$$2t^2 - t - 1 \geq 0 \qquad \Rightarrow \quad t \leq -\frac{1}{2} \quad \vee \quad t \geq 1$$

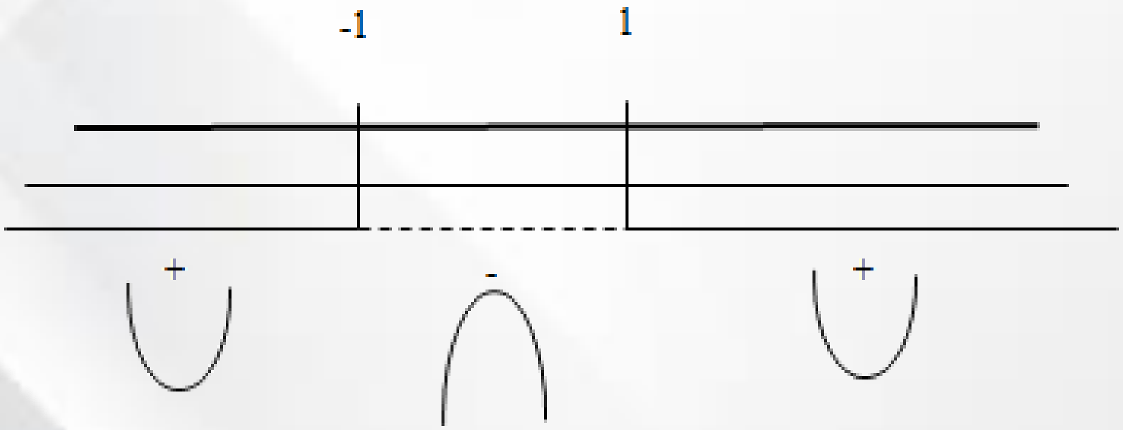
Ritornando all'incognita di partenza:

$x^2 \leq -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \nexists x \in D$

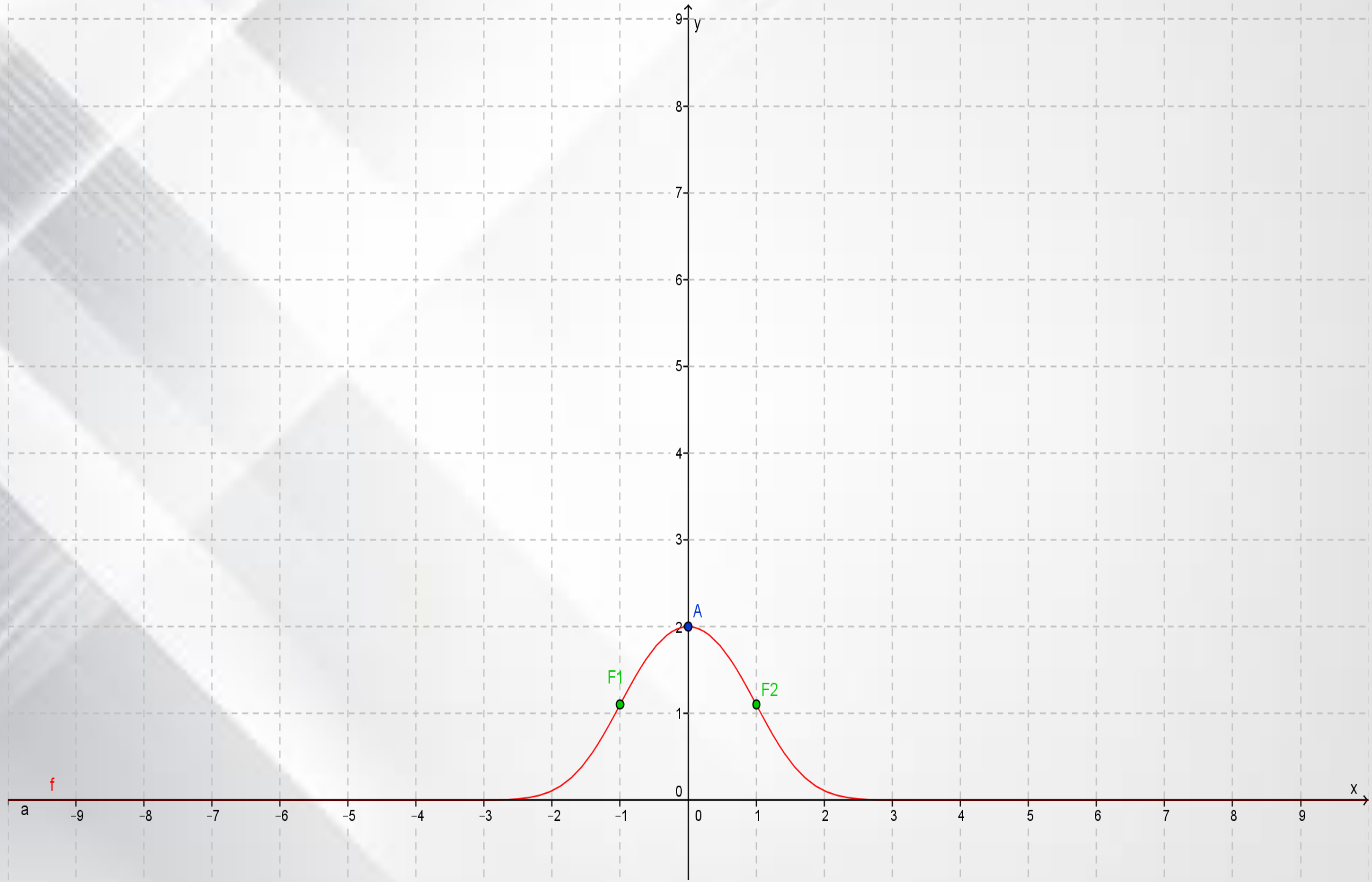
$x^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \; x \leq -1 \;\; \vee \;\; x \geq 1$

I punti $x = \pm 1$ sono punti di flesso.

$F_1(-1; 3e^{-1})$ $\qquad\qquad$ $F_2(1; 3e^{-1})$



Il grafico della funzione è riportato in figura:



Esercizio 7

Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = e^{\frac{x}{x+1}}$$

1. **Dominio**

In questo caso l'esponente è una frazione algebrica, per cui il dominio della funzione si ottiene dalla condizione:

$$x + 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \quad x \neq -1$$

$$x \in \,]-\infty; -1[\, \cup \,]-1; +\infty[$$

2. Simmetrie

$$f(-x) = e^{\frac{-x}{-x+1}} \neq f(x)$$

La funzione non è né pari né dispari

3. Intersezione con gli assi

ASSE X

Non esistono intersezioni con l’asse *x*, perché la funzione esponenziale non si annulla mai.

ASSE Y

$$\begin{cases} y = e^{\frac{x}{x+1}} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = e^{0} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il grafico incontra l’asse delle ordinate nel punto $A(0;1)$.

4. Studio del segno

$e^{\frac{x}{x+1}} > 0$

La funzione è sempre positiva perché esponenziale.

5. Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1}} = e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{1} = e$$

La retta $y = e$ è un asintoto orizzontale completo.

$$\lim_{x\to -1^-} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} e^{\frac{x}{x+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$$

$x = -1$ è un asintoto verticale a sinistra; esso inoltre è un punto di discontinuità di seconda specie.

6. Derivata prima: crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi

$$y' = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$y' \geq 0$

1° Fattore: $e^{\frac{x}{x+1}} \geq 0 \qquad \Rightarrow \; \forall x \in D$

2° Fattore: $\frac{1}{(x+1)^2} \geq 0 \qquad \Rightarrow \; \forall x \in D$

Non esistono né massimi né minimi. La funzione è sempre crescente.

7. Derivata seconda: concavità, convessità, flessi

$$y' = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}$$

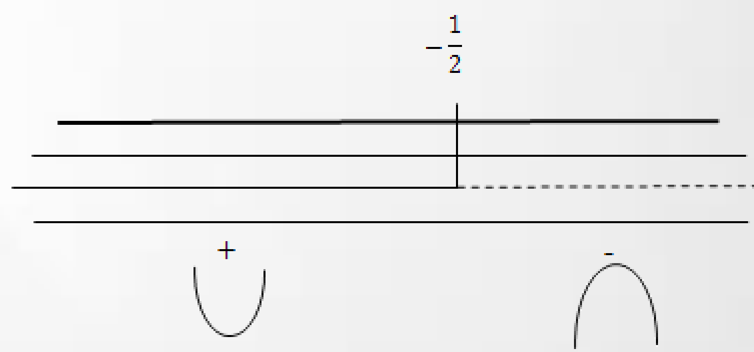
$$y'' = \frac{\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} \cdot (x+1)^2 - e^{\frac{x}{x+1}} \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}[1 - 2(x+1)]}{(x+1)^4} = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}(-2x-1)}{(x+1)^4}$$

$y'' \geq 0$

$N_1\colon\ e^{\frac{x}{x+1}} \geq 0 \qquad \Rightarrow\ \forall x \in D$

$N_2\colon (-2x-1) \geq 0 \qquad \Rightarrow 2x+1 \leq 0 \qquad \Rightarrow\ x \leq -\frac{1}{2}$

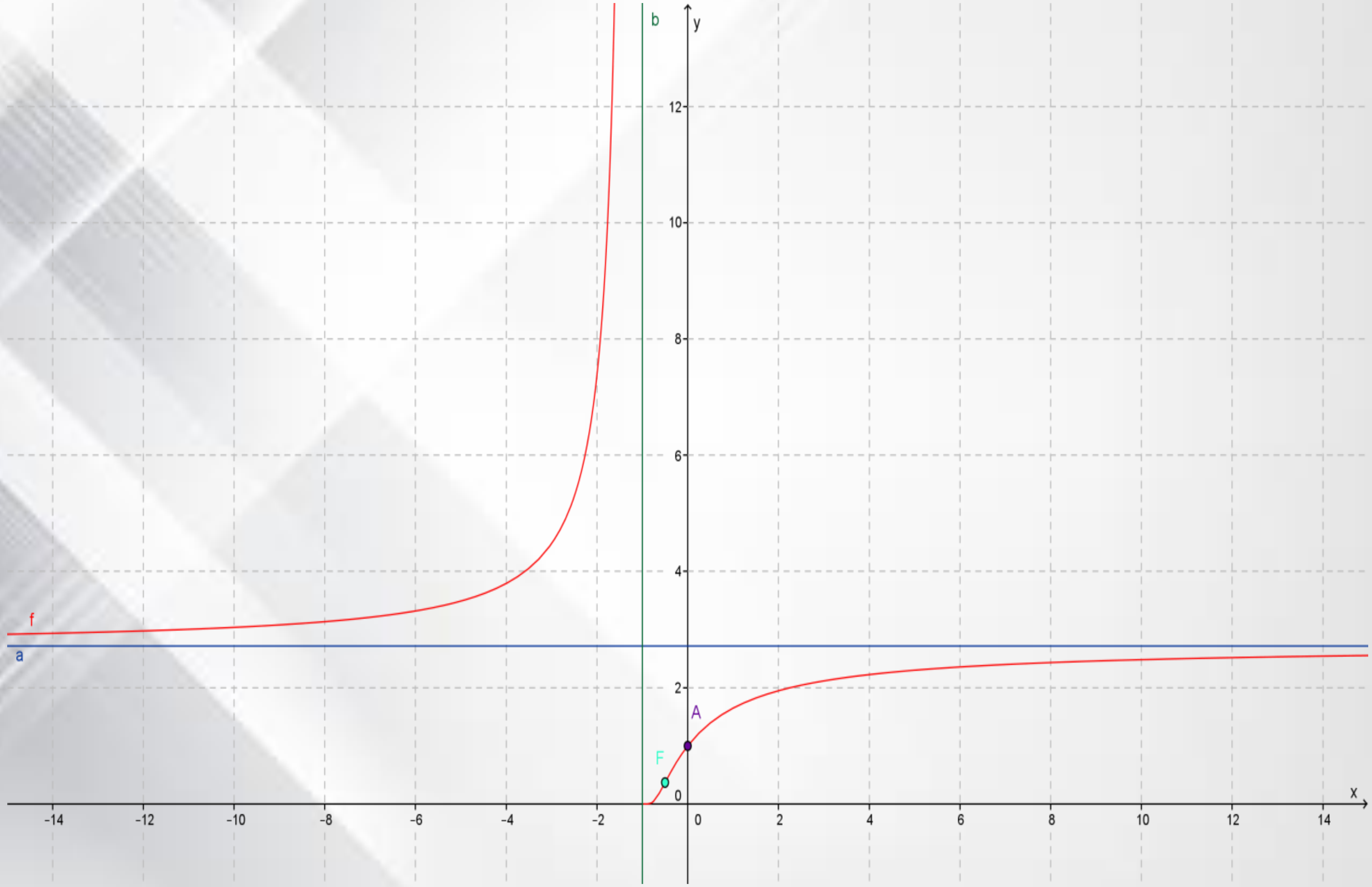
$D\colon\ (x+1)^4 > 0 \qquad \Rightarrow\ \forall x \in D$



$x = -\frac{1}{2}$ è un punto di flesso.

$F\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{e}\right)$

Il grafico della funzione è riportato in figura:



Esercitazione

Studiare e tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

- $y = \frac{x-1}{x^2-4}$
- $y = \frac{x-1}{x^3}$
- $y = \frac{7}{x^2+1} - 3$
- $y = \frac{1}{x^2+x-2}$
- $y = \ln\frac{2x-8}{x-3}$
- $y = \frac{e^x}{x^2-4}$
- $y = \ln\frac{x^2-1}{x}$
- $y = e^{2x^2-4x}$