Università degli Studi
Mediterranea
di Reggio Calabria

DECISIONS_LAB
FOR COVID-19

Corso di Matematica per l'Economia

ESERCITAZIONE STUDIO DI FUNZIONE

Parte 2

Prof. **Massimiliano Ferrara**
Prof. **Bruno Antonio Pansera**

A cura della Dott.ssa **Mariangela Gangemi**

| DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA |
DiGiES
DIPARTIMENTO
GIURISPRUDENZA
ECONOMIA
SCIENZE UMANE
International Program
Terza Missione

Anno Accademico 2020-2021

Esercizio 3

Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

1. Dominio

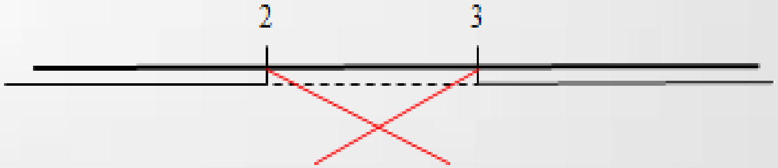
$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$x < 2 \ \vee \ x > 3$$

$x \in \,]-\infty; 2[\, \cup \,]3; +\infty[$



2. Simmetrie

$$f(-x) = \ln[(-x)^2 - 5(-x) + 6] \neq f(x)$$

La funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezione con gli assi

ASSE X

$$\begin{cases} y = \ln(x^2 - 5x + 6) \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln(x^2 - 5x + 6) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln(x^2 - 5x + 6) = \ln 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \; ; \; x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Il grafico incontra l’asse delle ascisse nei punti $A\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ e $\mathrm{B}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

ASSE Y

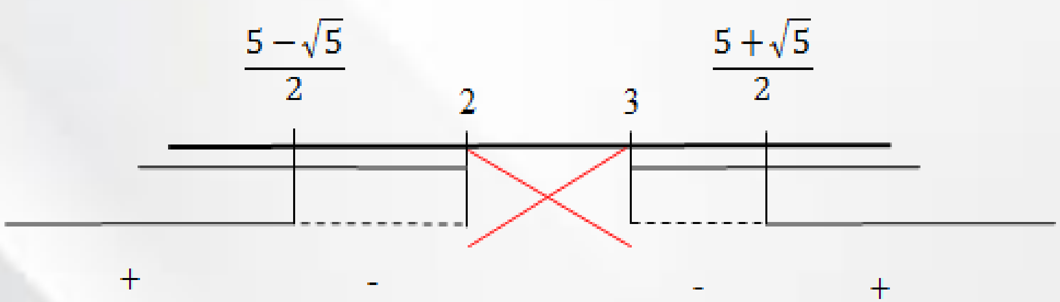
$$\begin{cases} y = \ln(x^2 - 5x + 6) \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \ln 6 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il grafico incontra l'asse delle ordinate nel punto $C(0; \ln 6)$.

4. Segno della funzione

$$\ln(x^2 - 5x + 6) > 0$$

$$x^2 - 5x + 6 > 1 \qquad \Rightarrow\ x^2 - 5x + 5 > 0 \qquad \Rightarrow\ x < \frac{5-\sqrt{5}}{2} \ \vee\ x > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$



5. Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 - 5x + 6) = +\infty$$

Non esistono asintoti orizzontali; potrebbero esistere asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(x^2 - 5x + 6)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Per risolvere l'indeterminazione utilizziamo il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \cdot \ (2x - 5) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{2x - 5} = 0$$

$m = 0$

Possiamo quindi concludere che non esistono asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(x^2 - 5x + 6) = \ln 0^+ = -\infty$$

La retta $x = 2$ è un asintoto verticale a sinistra.

$$\lim_{x \to 3^+} \ln(x^2 - 5x + 6) = \ln 0^+ = -\infty$$

La retta $x = 3$ è un asintoto verticale a destra.

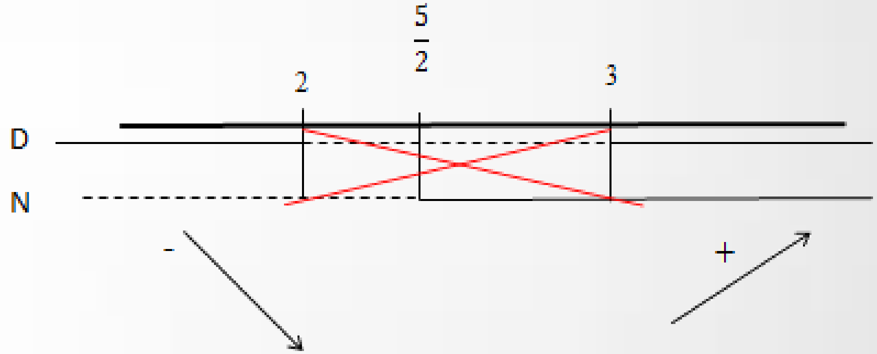
6. Derivata prima: crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi

$y' = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \cdot (2x - 5)$

$y' \geq 0$

$N\!: \; 2x - 5 \geq 0 \qquad \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$

$D\!: \; x^2 - 5x + 6 > 0 \qquad \Rightarrow x < 2 \; \vee \; x > 3$



Non ci sono né massimi né minimi.

7. Derivata seconda: concavità, convessità, flessi

$$y'' = \frac{2(x^2-5x+6)-(2x-5)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{2x^2-10x+12-(2x-5)^2}{(x^2-5x+6)^2}$$
$$= \frac{2x^2-10x+12-(4x^2+25-20x)}{(x^2-5x+6)^2}$$
$$= \frac{2x^2-10x+12-4x^2-25+20x}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{-2x^2+10x-13}{(x^2-5x+6)^2}$$

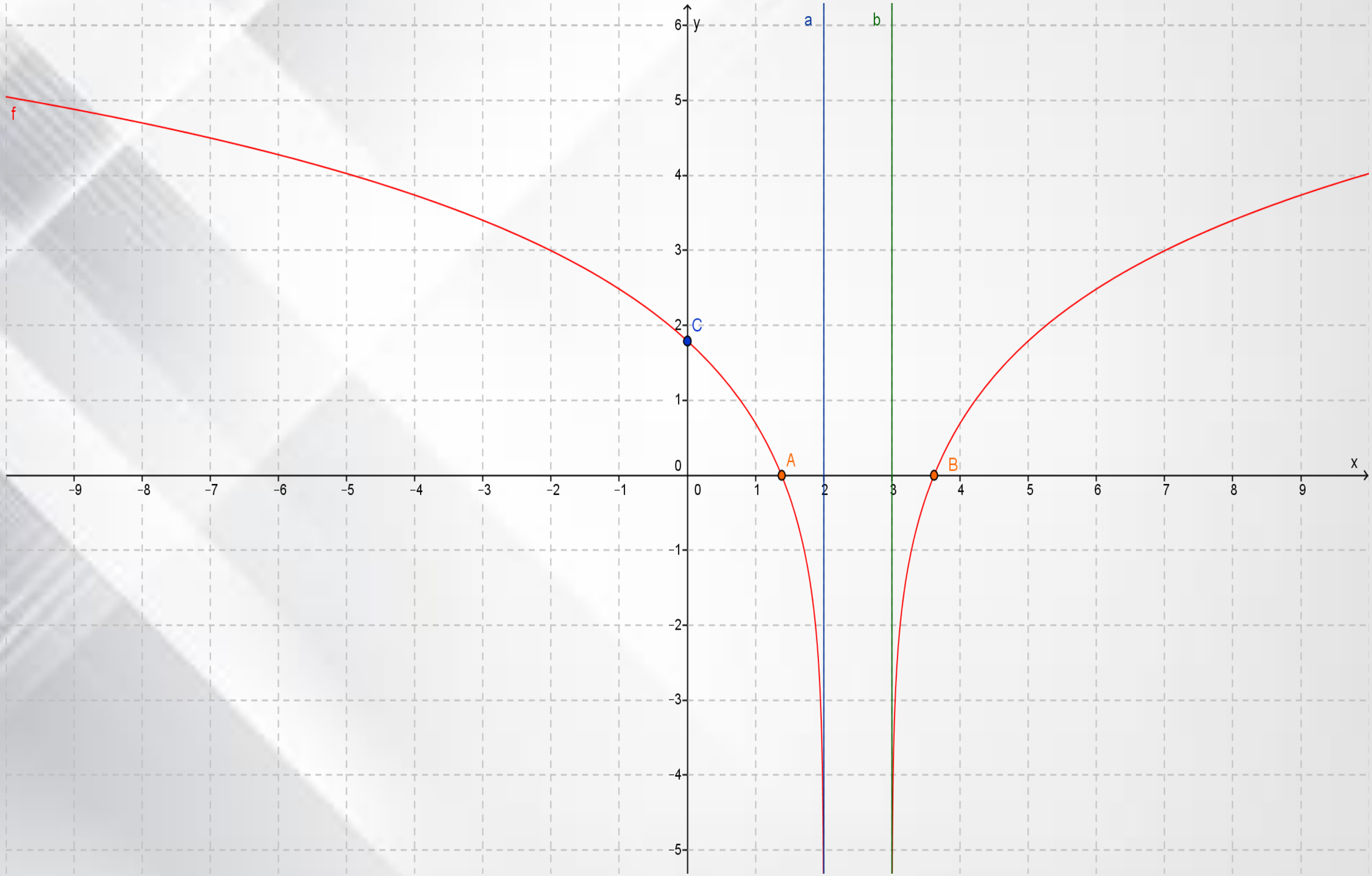
$y'' \geq 0$

N: $-2x^2+10x-13 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; 2x^2-10x+13 \leq 0 \quad \Rightarrow \nexists x \in D$

D: $(x^2-5x+6)^2 > 0 \quad \Rightarrow \;\; \forall x \in D$

Dato che il numeratore è sempre negativo tutta la frazione è sempre negativa; pertanto la funzione volge la concavità verso il basso.

Il grafico della funzione è riportato nella figura:



Esercizio 4

Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = \ln \frac{x^2}{x+4}$$

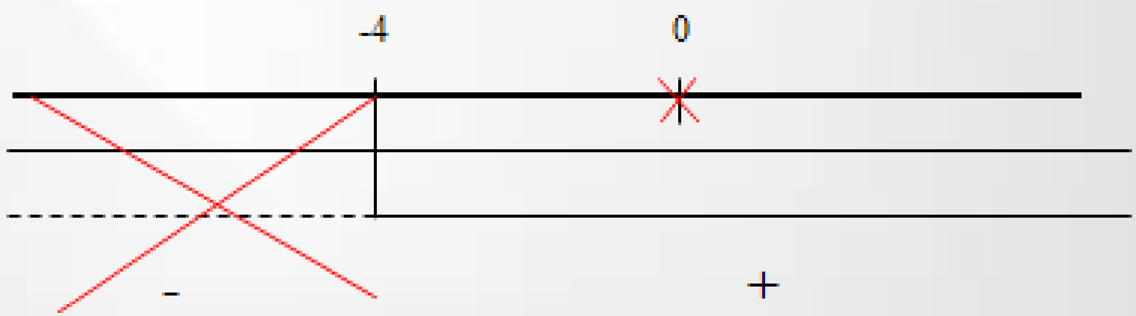
1. Dominio

$\frac{x^2}{x+4} > 0$

N: $x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ perché l'argomento non può mai essere uguale a zero.

D: $x + 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -4$

$x \in \left]-4; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$



2. Simmetrie

$f(-x) = \ln\frac{(-x)^2}{-x+4} \neq f(x)$

La funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi

ASSE X

$$\begin{cases} y = \ln\dfrac{x^2}{x+4} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln\dfrac{x^2}{x+4} = \ln 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2};\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \\ 0 \end{cases}$$

Il grafico incontra l'asse delle ascisse nei punti $A\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}; 0\right)$ e $B\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 0\right)$.

ASSE Y

Non esistono intersezioni con l'asse *y* perché $x = 0$ non appartiene al dominio.

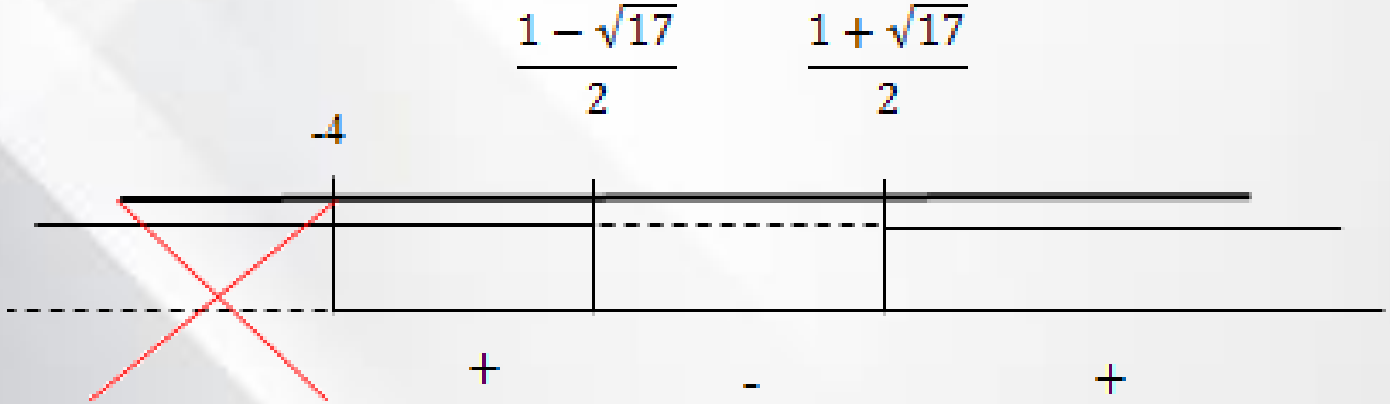
4. Studio del segno

Poniamo $f(x) > 0$

$$\ln\frac{x^2}{x+4} > 0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x+4} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-x-4}{x+4} > 0$$

$$N: \quad x^2 - x - 4 > 0 \qquad \Rightarrow x < \frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$$D: \; x + 4 > 0 \qquad \Rightarrow x > -4$$



5. Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to -4^+} \ln\frac{x^2}{x+4} = +\infty$$

La retta $x = -4$ è un asintoto verticale a destra.

$$\lim_{x\to 0} \ln\frac{x^2}{x+4} = -\infty$$

La retta $x = 0$ è un asintoto verticale completo.

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\frac{x^2}{x+4} = \ln \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x+4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\ln \lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty$$

Non esistono asintoti orizzontali; potrebbero esistere gli asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\frac{x^2}{x+4}}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Questo limite si presenta della forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che si risolve utilizzando il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{x^2}{x+4}} \cdot \frac{2x(x+4)-x^2}{(x+4)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+4}{x^2} \cdot \frac{2x^2+8x-x^2}{(x+4)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+8x}{x^3+4x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+8}{3x^2+8x} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{6x+8} = 0$$

$$m = 0$$

Non esistono asintoti obliqui.

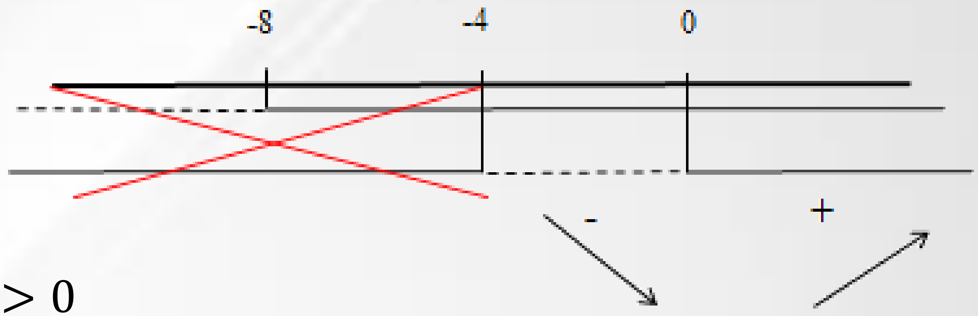
6. Derivata prima: crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi

$$y' = \frac{1}{\frac{x^2}{x+4}} \cdot \frac{2x(x+4)-x^2}{(x+4)^2}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$y' = \frac{x+8}{x(x+4)}$$

$y' \geq 0$



$N: x + 8 \geq 0 \qquad \Rightarrow x \geq -8$

$D: x(x+4) > 0 \qquad \Rightarrow \quad x < -4 \vee x > 0$

Non esistono né massimi né minimi perché $x = 0$ non appartiene al dominio.

7. Derivata seconda: concavità, convessità, flessi

$$y'' = \frac{(x^2+4x)-(x+8)(2x+4)}{(x^2+4x)^2}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$y'' = \frac{-x^2-16x-32}{(x^2+4x)^2}$$

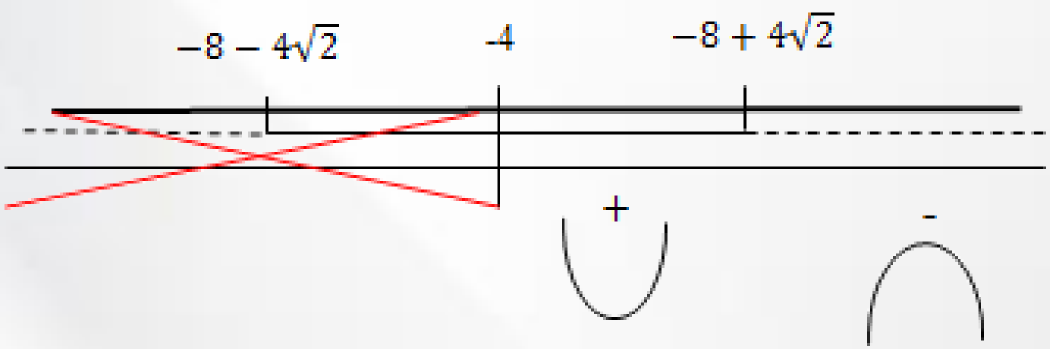
$y'' \geq 0$

$N\colon\ -x^2 - 16x - 32 \geq 0 \qquad \Rightarrow x^2 + 16x + 32 \leq 0 \qquad \Rightarrow -8 - 4\sqrt{2} \leq x \leq -8 + 4\sqrt{2}$

$D\colon (x^2 + 4x)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \forall x \in D$

$x = -8 + 4\sqrt{2}$ è un punto di flesso.

$F\left(-8 + 4\sqrt{2}; \ln\left(-8 + 8\sqrt{2}\right)\right)$



Il grafico della funzione è riportato in figura: