FUNZIONI DI DUE (O PIU') VARIABILI

Prof. Massimiliano Ferrara

Corso di Matematica per l'Economia

Cds in Scienze Economiche

Università degli Studi Mediterranea di Reggio Calabria

FUNZIONI DI DUE (O PIU') VARIABILI

- Una funzione di più variabili viene indicata come:

$f: A \to B$ con $A \subseteq R^n$

- Se n=2 la funzione presenta due variabili indipendenti e viene normalmente scritta come:

$$z = f(x, y)$$

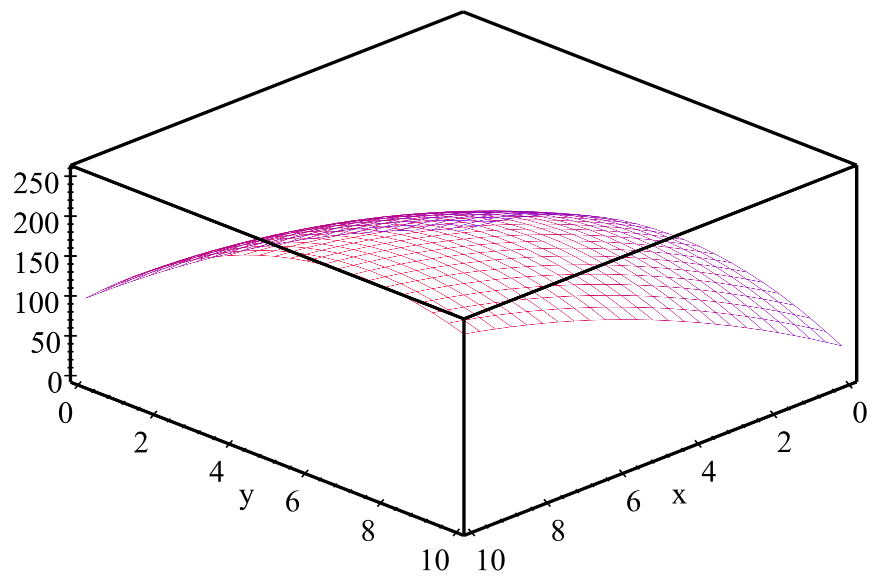
- La sua rappresentazione grafica si realizza introducendo un sistema cartesiano di riferimento riportando sull'asse verticale (!!!) i valori della variabile dipendente *z*.

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Esempio 1

- Il grafico della funzione

è: $$z = -x^2 + 20x - 3 + 34y - 3y^2 + xy$$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

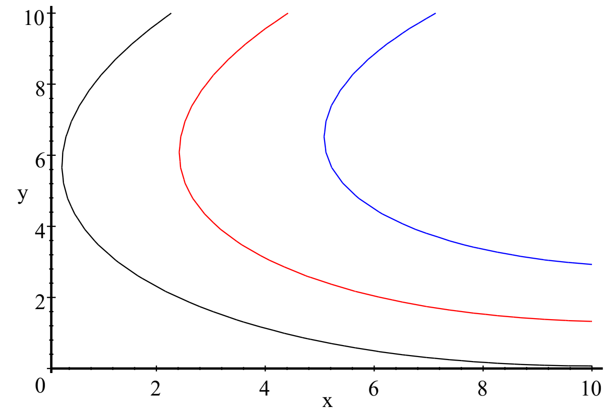
- La funzione di Cobb-Douglas:

$$P = CK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

- dove:
- P=produzione totale
- C=produzione unitaria
- L=unità di lavoro impiegato
- K=unità di capitale investito
- α=costante compresa tra 0 ed 1

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Sezionando il grafico di una funzione di due variabili con un piano parallelo al piano *xy* si ottengono le *curve di livello*. Considerando la funzione dell'esempio 1 e proiettando le curve di livello sul piano *xy* si ottiene:



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Una funzione è omogenea di grado “s” se:

$$f(vx, vy) = v^s f(x, y)$$

- La funzione di Cobb-Douglas è omogenea di grado s=1:
-

$$P(vK, vL) = C(vK)^\alpha (vL)^{1-\alpha} =$$

$$= Cv^\alpha K^\alpha v^{1-\alpha} L^{1-\alpha} = v^\alpha v^{1-\alpha} CK^\alpha L^{1-\alpha} = vP(K, L)$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- L'estensione del concetto di limite di una funzione non è immediata. Infatti la modalità di avvicinamento nel piano *xy* di un punto di coordinate (x_o, y_o) ad un punto di accumulazione per il dominio della funzione non è unica ma anzi può avvenire seguendo un numero infinito di traiettorie. Vale il risultato:
- *Il* $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ *è uguale ad "l" se, per ogni successione che converge a* (x_o, y_o) (x, y)

  la successione $n \to (x_n, y_n)$ *converge ad "l".*

  $$n \to f(x_n, y_n)$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Considerando la variazione della funzione (continua) generata dalla variazione di una variabile alla volta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

si ottengono (con le stesse attenzioni delle funzioni di una variabile) le derivate parziali rispetto ad *x* e rispetto ad *y* : $f_x(x,y)$ *e* $f_y(x,y)$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Il vettore che contiene le derivate parziali della funzione viene denominato gradiente della funzione e viene indicato:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Le derivate parziali per la funzione di C-D sono:

$$P_K(K,L) = \frac{\partial P}{\partial K} = C \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} = \alpha \frac{P}{K}$$

$$P_L(K,L) = \frac{\partial P}{\partial L} = C \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} \cdot L^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{P}{L}$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- L'elasticità della produzione rispetto al capitale è:
- $$E_K = \frac{\frac{\partial P}{\partial K}}{\frac{P}{K}} = \frac{K}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial K}$$ ovvero $$E_K = \alpha$$
- L'elasticità della produzione rispetto al lavoro è:
- $$E_L = \frac{\frac{\partial P}{\partial L}}{\frac{P}{L}} = \frac{L}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial L}$$ ovvero $$E_L = 1 - \alpha$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Derivate di ordine successivo. Le derivate parziali prime in quanto funzioni possono essere derivate a loro volta (naturalmente se soddisfano le condizioni già ricordate), ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}=f_{yx}(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

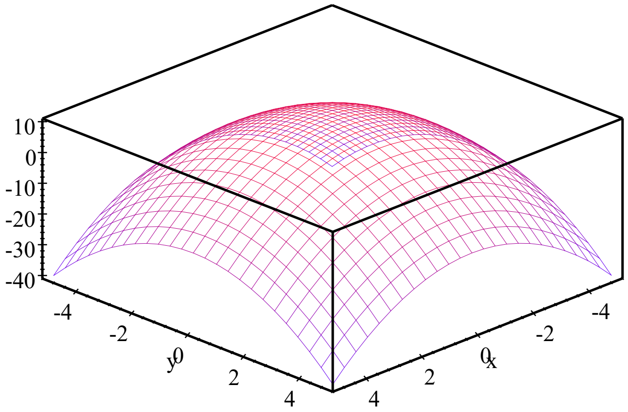
FUNZIONI DI DUE VARIABILI

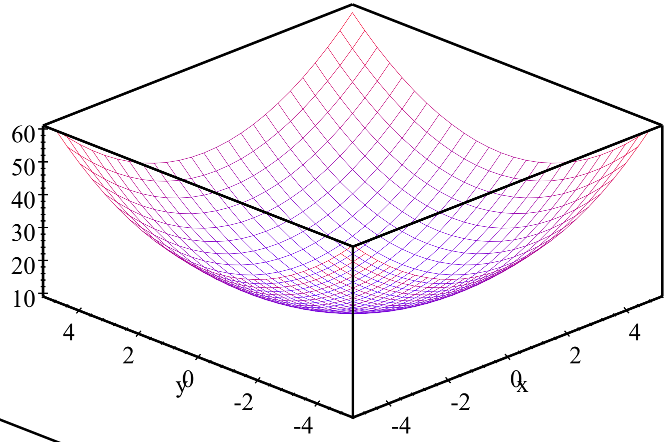
Le derivate parziali seconde possono essere organizzate in una matrice denominata **matrice Hessiana.**

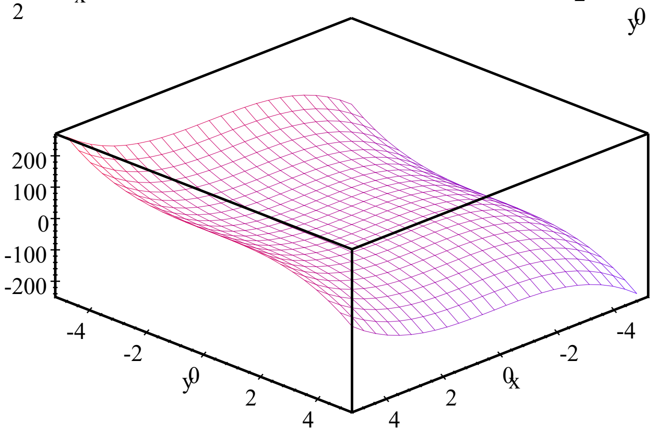
$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Massimi e minimi relativi (liberi) e selle.







FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Le condizioni necessarie e sufficienti sono :

Condizione necessaria

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Condizione sufficiente per avere un massimo relativo

1. $detH(x_o, y_o) > 0$
2. $f_{xx}(x_o, y_o) < 0$

Condizione sufficiente per avere un minimo relativo

1. $detH(x_o, y_o) > 0$
2. $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$

Condizione sufficiente per avere una sella

$detH(x_o, y_o) < 0$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Esempio 2.

- Determinare la natura dei punti critici della funzione:

$$f(x,y) = x^3 - y^2 + 6y - 12x + 5$$

- Dalle condizioni necessarie:

$$\begin{cases} 3x^2 - 12 = 0 \\ -2y + 6 = 0 \end{cases}$$

- si determinano i candidati: (-2,3) e (2,3).
- La matrice Hessiana è:

$$H = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Sostituendo le coordinate del primo punto si ha:

- $detH=24>0$
- $f_{xx}(-2,3)= -12$

e quindi in *(-2,3)* la funzione presenta un max.

Sostituendo le coordinate del secondo punto si ha:

- $detH= -24$
- $f_{xx}(2,3)=12$
- $f_{yy}(2,3)=-2$

e quindi in (2,3) la funzione presenta una sella.

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Massimi e minimi vincolati.

- La struttura del problema è la seguente:

$$\max_{(x,y)} f(x,y) \qquad g(x,y)=0$$

- Per risolvere il problema di massimo (minimo) vincolato si introduce la *funzione lagrangiana:*

$$L(\lambda,x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$$

- dove λ è il ***moltiplicatore*** di Lagrange.
- Il massimo (libero) della funzione di Lagrange (se esiste) equivale al massimo (vincolato) della funzione di partenza $f(x,y)$.

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Le condizioni necessarie per la funzione $L(\lambda, x, y)$ sono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Il soddisfacimento della prima condizione equivale al soddisfacimento del vincolo, infatti:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)\right] = g(x,y) = 0$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Teorema

Sia (λ_o, x_o, y_o) una soluzione del sistema di equazioni che esprimono le condizioni del primo ordine. Se la funzione lagrangiana è dotata di derivate parziali seconde e il determinante della matrice hessiana in (x_o, y_o) è positivo (negativo), allora in (λ_o, x_o, y_o) la funzione $z = f(x, y)$ presenta un massimo (minimo) relativo e soddisfa il vincolo.

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Il moltiplicatore di Lagrange(λ_o) rappresenta *“ il costo opportunità del vincolo*”.

  Si supponga che si voglia massimizzare la funzione dei ricavi e che il vincolo rappresenti il vincolo di spesa sui mezzi di produzione. Se si aumenta di 1 unità il budget allora i ricavi crescono di circa λ_o unità.

  Questo risultato consente di valutare se conviene aumentare (diminuire) le risorse investite.